

Cvičení 2

Úloha 1. Navrhněte algoritmus, který pro zadaný orientovaný graf a jeho vrcholy u a v nalezne největší možný systém *hranově disjunktních cest* z u do v .

Úloha 2. Upravte algoritmus z předchozí úlohy, aby nalezené cesty byly dokonce *vrcholově disjunktní* (až na krajní vrcholy).

Úloha 3. (*Věže*)

Mějme šachovnici $r \times s$, z níž políčkožrout sežral některá políčka. Chceme na ni rozestavět co nejvíce šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly, když

- (a) věž můžeme postavit na libovolné nesežrané políčko a ohrožuje všechny věže v téže řádce i sloupci,
- (b) stejná situace, ale dvě věže se neohrožují přes sežraná políčka.

Úloha 4. (*Pokrytí dominem*)

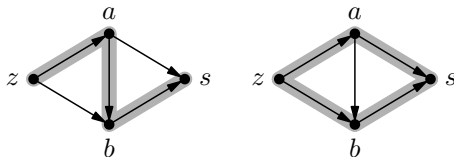
Opět šachovnice po zásahu políčkožrouta. Chceme na nesežraná políčka rozmístit kostky velikosti 1×2 políčka tak, aby každé nesežrané políčko bylo pokryto právě jednou kostkou (kostky je povoleno otáčet).

* **Úloha 5.** Přímocará implementace Fordova-Fulkersonova algoritmu bude nejspíš graf prohledávat do šířky, takže vždy najde *nejkratší* nenasycenou cestu. Pak překvapivě platí, že algoritmus zlepší tok jen $\mathcal{O}(nm)$ -krát, než se zastaví. Dokažte to.

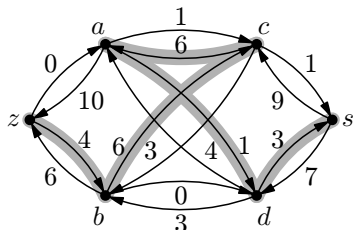
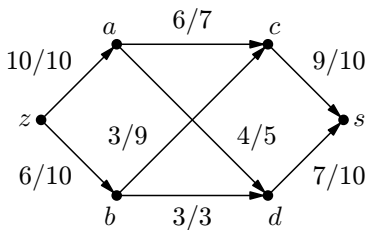
Úloha 6. Najděte příklad sítě s celočíselnými kapacitami hran s nejvýše 10 vrcholy a 10 hranami, na níž Fordův-Fulkersonův algoritmus provede více než milion iterací (pokud volí zlepšující cesty hodně nešikovně).

* **Úloha 7.** Najděte síť s reálnými kapacitami, na níž Fordův-Fulkersonův algoritmus nedoběhne.

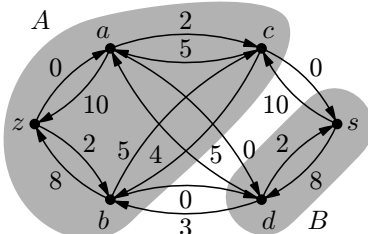
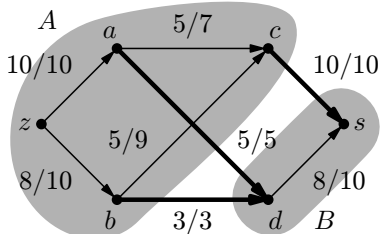
Relevantní ilustrace z Průvodce:



Důvod, proč Ford-Fulkerson musí uvažovat rezervy hran a nestačí uvažovat jen nevyužité kapacity. Nalevo tok, který by mohl najít algoritmus neuvažující rezervy, napravo optimální tok (kapacity hran jsou jednotkové).



Fordův-Fulkersonův algoritmus v řeči rezerv: vlevo tok/kapacita, vpravo rezervy a nenasycená cesta



Situace po zastavení F.-F. algoritmu: Nalevo tok/kapacita, napravo rezervy. V obou obrázcích řez dokazující optimalitu toku.