

Cvičení 4

Úloha 1. Profesor Forderson si řekl, že opraví nefunkční verzi F-F, která zlepšuje tok pouze po směru hran, tak, že bude vybírat *nejkratší* zlepšující cesty. Ukažte, že zlepšovák pana profesora nefunguje!

Úloha 2. Navrhněte algoritmus, který pro zadaný orientovaný graf a jeho vrcholy u a v nalezne největší možný systém *hranově disjunktních cest* z u do v .

Úloha 3. Upravte algoritmus z předchozí úlohy, aby nalezené cesty byly dokonce *vrcholově disjunktí* (až na krajní vrcholy).

Úloha 4. (*Věže*)

Mějme šachovnici $r \times s$, z níž políčkožrout sežral některá políčka. Chceme na ni rozestavět co nejvíce šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly, když

- (a) věž můžeme postavit na libovolné nesežrané políčko a ohrožuje všechny věže v témže řádku i sloupci,
- (b) stejná situace, ale dvě věže se neohrožují přes sežraná políčka.

Úloha 5. (*Pokrytí dominem*)

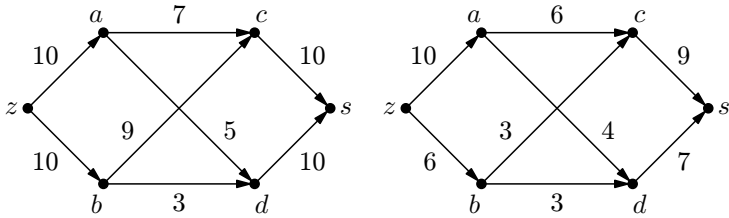
Opět šachovnice po zásahu políčkožrouta. Chceme na nesežraná políčka rozmístit kostky velikosti 1×2 políčka tak, aby každé nesežrané políčko bylo pokryto právě jednou kostkou (kostky je povoleno otáčet).

* **Úloha 6.** Najděte příklad sítě s celočíselnými kapacitami hran s nejvýše 10 vrcholy a 10 hranami, na níž Fordův-Fulkersonův algoritmus provede více než milion iterací (promyslete, že úlohu lze splnit pro libovolně vysoké M místo milionu, takže efektivita algoritmu není funkcí počtu hran).

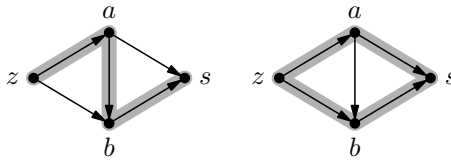
* **Úloha 7.** Najděte síť s reálnými kapacitami, na níž Fordův-Fulkersonův algoritmus nedoběhne. Lze dokonce zařídit, aby k maximálnímu toku ani nekonvergoval.

* **Úloha 8.** Přímočará implementace Fordova-Fulkersonova algoritmu bude nejspíš graf prohledávat do šířky, takže vždy najde *nejkratší* nenasycenou cestu. Pak překvapivě platí, že algoritmus zlepší tok jen $\mathcal{O}(nm)$ -krát, než se zastaví. Dokažte to.

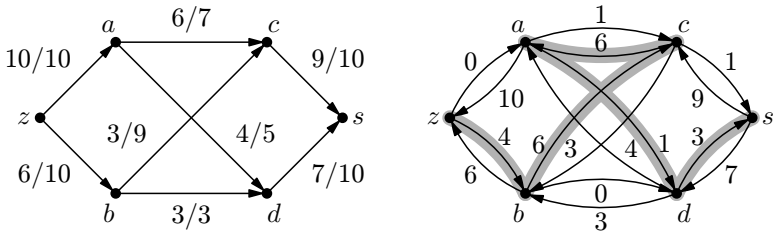
Relevantní ilustrace z Průvodce:



Nalevo síť, napravo tok v ní o velikosti 16



Důvod, proč Ford-Fulkerson musí uvažovat rezervy hran a nestačí uvažovat jen nevyužité kapacity. Nalevo tok, který by mohl najít algoritmus neuvažující rezervy, napravo optimální tok (kapacity hran jsou jednotkové).



Fordův-Fulkersonův algoritmus v řeči rezerv: vlevo tok/kapacita, vpravo rezervy a nenasyčená cesta