

## Cvičení 9

**Úloha 1.** Kolik je booleovských funkcí  $n$  proměnných? Jak vypadají booleovské funkce dvou proměnných?

**Úloha 2.** Dokažte, že každou booleovskou funkci dvou proměnných lze vyjádřit pomocí hradel AND, OR a NOT. Díky tomu lze každý booleovský obvod s nejvýše dvouvstupovými hradly upravit tak, aby používal pouze tyto tři typy hradel. Jeho hloubka (i počet použitých hradel) přitom vzroste pouze konstanta-krát.

**Úloha 3.** Pokračujme v předchozím cvičení: dokažte, že stačí jediný typ hradla, a to NAND (negovaný AND). Podobně by stačil NOR (negovaný OR). Existuje nějaká další funkce s touto vlastností?

**Úloha 4.** Sestavte hradlovou síť ze čtyř hradel NAND, která počítá XOR dvou bitů.

**Úloha 5.** Ukažte, jak hradlovou síť s libovolnou abecedou (konečné velikosti) přeložit na ekvivalentní booleovský obvod s nejvýše konstantním zpomalením. Abecedu zakódujte binárně, hradla simulujte booleovskými obvody.

\* **Úloha 6.** Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s  $k$  vstupy lze spočítat booleovským obvodem hloubky  $\mathcal{O}(k)$  s  $\mathcal{O}(2^k)$  hradly. To speciálně znamená, že pro pevné  $k$  lze booleovské obvody s nejvýše  $k$ -vstupovými hradly překládat na obvody s 2-vstupovými hradly. Hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.

\* **Úloha 7.** Exponenciální velikost obvodu z minulého cvičení je nepříjemná, ale bohužel nevyhnutelná. Dokažte, že pro žádné  $k$  neplatí, že všechny  $n$ -vstupové booleovské funkce lze spočítat obvody s  $\mathcal{O}(n^k)$  hradly (*to samozřejmě ještě nevylučuje subexponenciální velikost; dolní odhad můžete zkusit ještě zesílit*).

**Úloha 8.** Místo omezení arity hradel bychom mohli omezit typy funkcí, řekněme na AND, OR a NOT, a požadovat polynomiální počet hradel. Tím by také vznikl realistický model, byť s trochu jinými vlastnostmi. Dokažte, že síť tohoto druhu s  $n$  vstupy lze přeložit na síť s omezenou aritou hradel, která bude pouze  $\mathcal{O}(\log n)$ -krát hlubší. K čemu bylo nutné omezení počtu hradel?

**Úloha 9.** Upravte sčítací síť, aby odčítala.

**Úloha 10.** *Souvislost grafu:*

Sestrojte hradlovou síť logaritmické hloubky, která dostane matici sousednosti neorientovaného grafu a rozhodne, zda je graf souvislý.