Cvičení 7

Úloha 1. Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$ a $y = (1 - i, 1, 1)^T$

(a) skalární součin $\langle x, y\rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Úloha 2. Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na $x = (1, 5, 2)^T$? Jak obecně vypadá množina vektorů kolmých na jeden fixní vektor v dimenzi d?

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Úloha 4. Určete souřadnice vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$.

Úloha 5. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Úloha 6. Rozšiřte ortonormální systém z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Úloha 7. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí
$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}.$$

Definice *(Axiomy skalárního součinu v tělese V nad $\mathbb{C}$)*:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in V$, a rovnost nastane jen pro $x = 0$.
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro všechna $x, y \in V$.
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ pro všechna $x, y, z \in V$.
4. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Věta *(Cauchyho-Schwarzova nerovnost)*:
Skalární součin libovolných dvou vektorů u a v (ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$) splňuje
$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle},$$
neboli
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$
kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

Algoritmus *(Gramova-Schmidtova ortogonalizace)*:
Buďte $x_1, \ldots, x_n \in V$ lineárně nezávislé.

$$\text{Opakuj pro } k = 1 \ldots n:$$
$$y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j\rangle z_j,$$
$$z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k.$$

Výstup: Ortonormální báze $z_1, \ldots, z_n$ prostoru $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$.