Cvičení 11

Úloha 1. Ukažte, že rovnice $5x^2+8xy+5y^2=1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

Úloha 2. Uvažujme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ zadanou vztahem

$$g((x_1,x_2)^T) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Určete signaturu symetrické bilineární formy, která g vytváří.
Určete, pro které vektory je hodnota kvadratické formy nulová, kladná, záporná.

Úloha 3. Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T A x$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4. Najděte všechna reálná řešení

$$\begin{aligned} \text{rovnice} \quad & 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 = 0 \quad \text{a} \\ \text{nerovnice} \quad & 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 < 0. \end{aligned}$$

Úloha 5. Simultánní diagonalizovatelnost.

(a) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně semidefinitní a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Ukažte, že existuje regulární $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že obě matice C^TAC a C^TBC jsou diagonální. Matice A a B tedy můžeme diagonalizovat simultánně.

(b) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.