Domácí úkol 7

Úloha 1 (3+3+3 body). Stopa čtvercové matice je definovaná jako

$$trace(A) = \sum_i a_{ii}.$$

Ukažte, že platí:

1. $trace(A)^2 \leq n \cdot trace(A^T A)$,
2. $trace(A^2) \leq trace(A^T A)$,
3. $trace(A^T B) \leq \frac{1}{2} \big(trace(A^T A) + trace(B^T B)\big)$.

Úloha 2 (7 bodů). Platí následující tvrzení (nemusíte ho dokazovat):
Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je jeho ortonormální báze a $u, v \in V$, pak

$$\langle u, v \rangle = [u]_B^H [v]_B.$$

Nechť $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je takový skalární součin na $\mathbb{R}^2$, že báze B níže je vzhledem k němu ortonormální. Najděte vzorec pro $\langle (x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \rangle$ v závislosti na x_1, x_2, y_1, y_2.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$