Úloha 1. Při použití standardního skalárního součinu v $\mathbb{C}^3$ spočítejte pro vektory $x = (1, 3i, 1 + 5i)^T$ a $y = (1 - i, 1, 1)^T$

(a) skalární součin $\langle x, y \rangle$,

(b) normy $\|x\|$, $\|y\|$,

(c) vzdálenost x od y.

Řešení:

(a) Podle definice je

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^{3} x_i \overline{y_i} \\ &= 1 \cdot (1 + i) + 3i \cdot 1 + (1 + 5i) \cdot 1 = 2 + 9i.\end{aligned}$$

(b) Opět podle definice

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{x^T \overline{x}} = \sqrt{1 + 3i(-3i) + (1 + 5i)(1 - 5i)} = \sqrt{1 + 9 + 26} = 6, \\ \|y\| &= \sqrt{y^T \overline{y}} = \sqrt{2 + 1 + 1} = 2.\end{aligned}$$

(c) Vzdálenost mezi vektory odpovídá normě jejich rozdílu, tedy

$$\|x - y\| = \|(i, -1 + 3i, 5i)^T\| = 6.$$

Úloha 2. Jak vypadá množina všech vektorů, které jsou kolmé na $x = (1, 5, 2)^T$? Jak obecně vypadá množina vektorů kolmých na jeden fixní vektor v dimenzi d?

Řešení: Vektor $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ je na x kolmý, pokud

$$0 = \langle x, y \rangle = y_1 + 5y_2 + 2y_2.$$

Množina hledaných vektorů je tedy popsána rovnicí $y_1 + 5y_2 + 2y_2 = 0$, a geometricky tvoří rovinu v $\mathbb{R}^3$. Její bázi tvoří např. vektory $(5, -1, 0)^T, (2, 0, -1)^T$. V obecné dimenzi d je množina kolmých vektorů dána jednou rovnicí a představuje nadrovinu $\mathbb{R}^d$, tedy podprostor dimenze $d - 1$ (výjimkou je x rovné nulovému vektoru, na který jsou kolmé všechny vektory, a kdy je ona jedna rovnice degenerovaná: $0 = 0$).

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující zobrazení představují skalární součin na prostoru $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$,

(b) $\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,

(d) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$.

Řešení:

(a) Ne, protože není splněna symetrie. Např. pro $x = (1, 0)^T, y = (0, 1)^T$ je

$$\langle x, y\rangle = 2 \neq -2 = \langle y, x\rangle.$$

(b) Ne, protože pro $x = (1, 0)^T$ je $\langle x, x\rangle = -1$, což není kladná hodnota.

(c) Ne. Pro stejné x teď máme $\langle x, x\rangle = 0$, což není kladná hodnota.

(d) Ano. Musíme ověřit všechny vlastnosti skalárního součinu:

- Platí

  $$\langle x, x\rangle = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$

  Hodnota je nulová právě když $x_1 + 2x_2 = 0$ a zároveň $x_2 = 0$, takže právě jen pro nulový vektor x.
- Symetrie je vidět na první pohled.
- U obou druhů linearity je jen potřeba rozepsat obě strany požadované rovnosti a nahlédnout, že se shodují.

Úloha 4. Určete souřadnice vektoru $(3, 2, 1)^T$ vůči ortonormální bázi $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\right)$.

Řešení: Protože se jedná o ortonormální bázi, můžeme využít toho, že souřadnice dostaneme jako *Fourierovy koeficienty*:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T \rangle \\ \langle (3,2,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T \rangle \\ \langle (3,2,1)^T, (0,0,1)^T \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem nalezněte pomocí Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace ortonormální bázi řádkového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Gramova-Schmidtova ortogonalizace nám dá ortonormální systém

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \\ z_2 &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \\ z_3 &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Úloha 6. Rozšiřte ortonormální systém z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Řešení: V první řadě potřebujeme x_1, x_2, x_3 rozšířit (nějakým vektorem x_4) na bázi celého $\mathbb{R}^4$. Například převedením zadané matice na odstupňovaný tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že nebázický bude jen čtvrtý sloupec, a můžeme zvolit $x_4 = (0,0,0,1)^T$. Teď můžeme pokračovat v Gram-Schmidtovi a dostaneme

$$z_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T.$$

Úloha 7. Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Řešení: Cuachy-Schwarz pro vektory

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x \\ \frac{1}{\sqrt{3}}y \\ \frac{1}{\sqrt{6}}z \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$