Úloha 1. Pomocí Gaussovy eliminace a determinantů hlavních vedoucích podmatic rozhodněte, zda jsou následující matice pozitivně definitní.
Najděte Choleského rozklad těch, které jsou.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & b^T \\ b & B \end{smallmatrix}\right)$ pro

$$a_{11} = 2, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a_{11} je kladná a rekurentní podmínka říká, že máme ověřit definitnost matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Další iterace ukáže, že matice **je pozitivně definitní**.

Totéž bychom ověřili Gaussovkou:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diagonála je kladná.

Zkusme ověření pomocí determinantů hlavních vedoucích podmatic:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$|2| > 0.$$

Všechny determinanty jsou kladné, matice je pozitivně definitní.

Choleského rozklad matice A je dán maticí

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B je PD a její Choleského rozklad je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I C je PD a její Choleského rozklad je dán maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: K diagonalizaci použijeme elementární řádkové úpravy. Po aplikaci řádkové úpravy musíme aplikovat taky odpovídající sloupcovou.
U matice A si usnadníme práci tím, že nejdřív prohodíme první a druhý řádek (a analogicky prohodíme sloupce).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dále eliminujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nakonec odečteme dvojnásobek druhého řádku od třetího (a podobně pro sloupce).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ke dalším dvěma maticím píšu jen výsledky:

$$B \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3. Uvažme relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci tehdy, když existuje regulární S, tž. $B = S^T AS$.
(a) Dokažte, že jde o relaci ekvivalence.
(b) Kolik má tříd ekvivalence?

Řešení:

(a) Ukážeme, že naše kongruence je reflexivní, symetrická a tranzitivní:

Reflexivita říká, že pro (libovolnou) matici A existuje regulární S, tž. $A = S^T AS$. Toto splňuje jednotková matice.

Symetrie říká, že pokud $B = S^T AS$ (pro regulární S), pak taky existuje (regulární) U, tž. $A = U^T BU$. Stačí za U zvolit $U := S^{-1}$.

Tranzitivita říká, že z vlastností

$$B = S^T AS \quad \text{a}$$
$$C = U^T BU \quad (\text{pro } S, U \text{ regulární})$$

plyne existence (regulární) matice V, tž. $C = V^T AV$.

Stačí volit $V := SU$.

(b) Sylvestrův zákon setrvačnosti říká, že matice kvadratické formy má diagonální tvar s diagonálou odpovídající signatuře formy (a na pořadí prvků na diagonále nezáleží). Proto má tato kongruence tolik tříd, kolik je možných voleb signatury (kombinace s opakováním),

$$\binom{n+2}{2}.$$

Úloha 4. Nechť

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy b na prostoru $\mathbb{T}^3$. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy f. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu (vše vůči stejné bázi).
Řešte pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ (v $\mathbb{Z}_2$ číslo 2 odpovídá 0).
Řešení:

$$b_{\mathbb{R}}(u,v) = u_1v_1 - 2u_1v_2 + 2u_2v_1 - u_2v_3 - 2u_3v_1 + 2u_3v_2,$$

$$f_{\mathbb{R}}(v) = v_1^2 - 2v_1v_3 + v_2v_3.$$

Stejnou formu vyjadřuje symetrická matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$ určete signatury forem s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & b & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Opět aplikujeme analogické elementární úpravy na řádky a na sloupce:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pro $a > 0$ je signatura $(2, 1, 0)$, pro $a < 0$ je signatura $(1, 2, 0)$ a pro $a = 0$ je signatura $(1, 1, 1)$.

Závislost signatury matice B na b vyjde jako ta na a v minulé podúloze.