Úloha 1. Ukažte, že rovnice $5x^2+8xy+5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

Řešení: Vyjádříme rovnost jako $x^T Ax = 1$ pro A pozitivně definitní (pak máme spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$ a obecně poloosy takového elipsoidu vedou do směru vlastních vektorů, tj. sloupců Q, a mají délky $1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}$).
V našem případě

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elipsa má osy $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$ a $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1)^T$.

Úloha 2. Uvažujme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$ zadanou vztahem

$$g((x_1,x_2)^T) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

Určete signaturu symetrické bilineární formy, která g vytváří.
Určete, pro které vektory je hodnota kvadratické formy nulová, kladná, záporná.

Řešení: Odpovídající symetrická bilineární forma má matici

$$[g]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Symetrickými úpravami najdeme rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = [g]_B,$$

kde $[g]_B$ značí formu g vůči bázi $B := \{(1,0)^T, (3,1)^T\}$, která je g-ortogonální (ortogonální „vůči formě g“).
Vidíme, že g má signaturu $(1,1,0)$. Řešme rovnici $g(x) = 0$. Uvážíme-li souřadnice $[x]_B = (a,b)^T$ vůči B, dostaneme

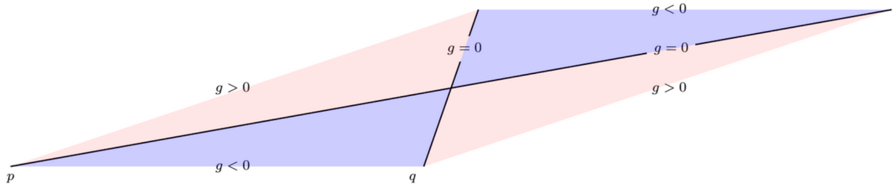
$$0 = g(x) = [x]_B^T \cdot [g]_B \cdot [x]_B = a^2 - 7b^2.$$

Řešením rovnice $a^2 - 7b^2 = 0$ je dvojice přímek

$$p : a = \sqrt{7}b,$$
$$q : a = -\sqrt{7}b.$$

Ty jsou generovány vektory

$$v_p = \sqrt{7}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}5.65\\1\end{pmatrix},$$
$$v_q = -\sqrt{7}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0.35\\1\end{pmatrix}.$$



(zdroj: cvika matematické sekce od Davida Stanovského)

Přímky nám rovinu dělí na výseče a víme, že mimo přímky jsou hodnoty nenulové, a forma je zároveň spojitá, takže každá výseš bude buď celá kladná, nebo celá záporná, což už můžeme zjistit dosazením libovolného jejího bodu.

Úloha 3. Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Řešení: Jak získat takový součet čtverců? Víme, že existuje rozklad $S^T AS = D$ (s diagonální D), a když substituujeme $y = S^{-1}x$, můžeme formu psát jako

$$f(x) = x^T Ax = y^T S^T ASy = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} y_i^2.$$

Teď má forma tvar součtu čtverců, ale v proměnné y. Můžeme dosadit zpět a máme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \left(S_{i*}^{-1}x\right)^2$.
V našem případě máme konkrétně

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

z čehož dopočítáme

$$f(x) = (x_1 + x_3)^2 + 2(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 + 2(\frac{1}{2}x_3)^2.$$

Úloha 4. Najděte všechna reálná řešení

$$\begin{aligned} \text{rovnice} \quad & 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 = 0 \quad \text{a} \\ \text{nerovnice} \quad & 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2 < 0. \end{aligned}$$

Řešení: Uvažme kvadratickou formu $f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_3^2$. Svou oblíbenou metodou můžete ověřit, že je pozitivně definitní, takže je nulová právě když $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, a $f(x) < 0$ nemá řešení.

Úloha 5. Simultánní diagonalizovatelnost.

(a) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně definitní a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Ukažte, že existuje regulární $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že obě matice C^TAC a C^TBC jsou diagonální. Matice A a B tedy můžeme diagonalizovat simultánně.

(b) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně definitní. Ukažte, že $\det(A+B) > \det(A) + \det(B)$.

Řešení:

(a) A je pozitivně definitní. Sylvestrův zákon setrvačnosti nám tak říká, že existuje regulární S, tž. $S^TAS = I$. Protože B je symetrická, je i S^TBS symetrická matice, a existuje její standardní ortogonální diagonalizace

$$Q^TS^TBSQ = \Lambda \quad \text{(kde } \Lambda \text{ je diagonální, } Q \text{ ortogonální).}$$

Teď také $Q^TS^TASQ = Q^TIQ = I$, a vidíme, že $C := SQ$ splňuje požadavek ze zadání.

(b) Z předchozího bodu víme, že existuje regulární C, tž. $C^TAC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $C^TBC = \operatorname{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ jsou diagonální (s kladnými hodnotami na diagonále, z pozitivní definitnosti). Přitom

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \frac{1}{\det(\mathrm{C})^2}\det(C^T(A+B)C) = \frac{1}{\det(\mathrm{C})^2}\det(D_A+D_B) \\
&= \frac{1}{\det(\mathrm{C})^2}\left((\lambda_1+\kappa_1)(\lambda_2+\kappa_2)\cdots(\lambda_n+\kappa_n)\right) \\
&\overset{*}{>} \frac{1}{\det(\mathrm{C})^2}\left((\lambda_1\cdots\lambda_n)+(\kappa_1\cdots\kappa_n)\right) = \det(A)+\det(B),
\end{aligned}$$

kde nerovnost označená hvězdičkou plyne z toho, že všechy lambdy a kappy jsou kladné.