Cvičení 3

Z minulého cvičení

Úloha 1. *(Věže)*
Mějme šachovnici $r \times s$, z níž políčkožrout sežral některá políčka. Chceme na ni rozestavět co nejvíce šachových věží tak, aby se navzájem neohrožovaly, když

(a) věž můžeme postavit na libovolné nesežrané políčko a ohrožuje všechny věže v témže řádku i sloupci,
(b) stejná situace, ale dvě věže se neohrožují přes sežraná políčka.

Úloha 2. *(Pokrytí dominem)*
Opět šachovnice po zásahu políčkožrouta. Chceme na nesežraná políčka rozmístit kostky velikosti 1×2 políčka tak, aby každé nesežrané políčko bylo pokryto právě jednou kostkou (kostky je povoleno otáčet).

Nové úlohy

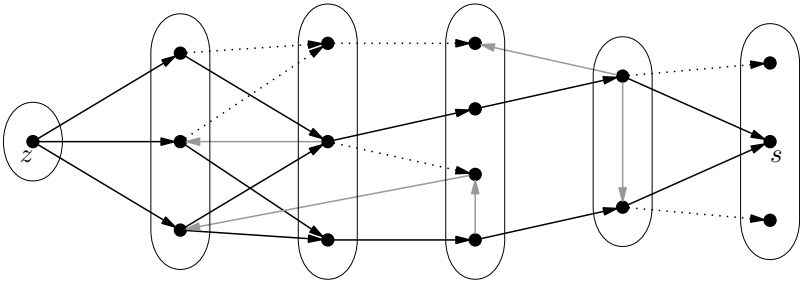
Úloha 3. *Jednotkový Dinic.*
Dokažte, že pro síť s (pouze) jednotkovými kapacitami Dinicův algoritmus běží v čase $\mathcal{O}(mn)$.
Dokažte totéž pro celočíselné kapacity omezené konstantou.

Úloha 4. *Odhad $\mathcal{O}(n^2m)$ je těsný.*

- Sestrojte síť, na níž Dinicův algoritmus provede $\Omega(n)$ fází.
- Sestrojte vrstevnatou síť, v níž hledání blokujícího toku trvá $\Omega(nm)$ *(pozor, tohle potřebujeme umět i pro případ, kdy $m \in \omega(n)$).*
- ***** Zkombinujte obě sítě a vytvořte síť, na níž Dinicův algoritmus běží v čase $\Omega(n^2m)$.

Úloha 5. *Cirkulace* se říká toku, v němž platí Kirchhoffův zákon v úplně všech vrcholech (je to tedy tok nulové velikosti). V dané síti najděte cirkulaci, která maximalizuje tok určenou hranou.

Úloha 6. *Bipartitní vrcholové pokrytí.*
Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu je množina vrcholů, která „*pokrývá*“ všechny hrany, tedy každá hrana sousedí alespoň s jedním vrcholem této množiny.
Navrhněte algoritmus pro nalezení *nejmenšího vrcholového pokrytí* v bipartitním grafu.
Pro obecné grafy nejlepší známý algoritmus vyžaduje exponenciální čas (a jde o NP-těžký problém.)



Síť rozdělená na vrstvy. Šedivé hrany (které vedou uvnitř jedné vrstvy nebo do minulých vrstev) a tečkované hrany (slepé uličky) během čištění sítě zmizí, plné zůstanou. *Obrázek je převzatý z Průvodce.*