Cvičení 4

Úloha 1. Rozeberte chování Goldbergova *preflow-push* algoritmu na sítích s jednotkovými kapacitami. Bude rychlejší než ostatní algoritmy?

Úloha 2. *Goldberg s nejvyšším vrcholem.*
Navrhněte implementaci vylepšeného Goldbergova algoritmu se zvedáním nejvyššího vrcholu s přebytkem. Počet nesaturujících zatlačení v takovém případě je $\mathcal{O}(n^2\sqrt{m})$ (*to nemusíte dokazovat*), cílem je implementace ve shodném čase.

Úloha 3. Co by se stalo, kdybychom v inicializaci algoritmu umístili zdroj do výšky $n-1$, $n-2$, anebo $n-3$ (namísto n)?

Úloha 4. *Bipartitní vrcholové pokrytí.*
Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu je množina vrcholů, která „*pokrývá*“ všechny hrany, tedy každá hrana sousedí alespoň s jedním vrcholem této množiny.
Navrhněte algoritmus pro nalezení *nejmenšího vrcholového pokrytí* v bipartitním grafu.
Pro obecné grafy nejlepší známý algoritmus vyžaduje exponenciální čas (a jde o NP-těžký problém.)

Úloha 5. *Cirkulace* se říká toku, v němž platí Kirchhoffův zákon v úplně všech vrcholech (je to tedy tok nulové velikosti). V dané síti najděte cirkulaci, která maximalizuje tok určenou hranou.

*** Úloha 6.** Uvažujeme o vybudování dolů $D_1, \ldots, D_p$ a továren $T_1, \ldots, T_q$. Vybudování dolu D_i stojí cenu d_i a od té doby důl zadarmo produkuje neomezené množství i-té suroviny. Továrna T_j potřebuje ke své činnosti zadanou množinu surovin a pokud jsou v provozu všechny doly produkující tyto suroviny, vyděláme na továrně zisk t_j. Vymyslete algoritmus, jenž pro zadané ceny dolů, zisky továren a bipartitní graf závislostí továren na surovinách stanoví, které doly postavit, abychom vydělali co nejvíce. Tedy aby rozdíl zisku a nákladů byl co největší.
Zkuste to bez min-cost max-flow, standardní toky stačí.