Cvičení 5

Úloha 1. *Fourierovy obrazy:*
Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů:
a) $(x, x, \ldots, x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ (zkuste nejdříve $x = 1$)
b) $(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$
c) $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$
d) $(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$
e) $(\omega^0, \omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{2n-2})$

Úloha 2. O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nultý a $(n/2)$-tý koeficient Fourierova obrazu?

Úloha 3. *Obraz kanonické báze:*
Jak vypadá Fourierův obraz jednotkového vektoru e_i, tedy vektoru který má na i-té pozici jedničku a všude jinde 0?

Úloha 4. *Inverz kanonické báze:*
Pro každé i najděte vektor, jehož Fourierovým obrazem je e_i. Jak z toho sestrojit inverzní Fourierův obraz?

Úloha 5. *DFT reálného vektoru:*
Ukažte, že Fourierův obraz $\mathbf{y}$ reálného vektoru $\mathbf{x}$ je *antisymetrický*, tedy $\mathbf{y}_j = \overline{\mathbf{y}_{n-j}}$ pro všechny indexy j.
Jaký pak bude Fourierův obraz antisymetrického vektoru?

Úloha 6. *Odmocniny z jedničky a volba ω:*
Kolik existuje n-tých odmocnin jedničky a jak vypadají? Proč jiná čísla nejsou n-tou odmocninou z jedničky? Které z n-tých odmocnin jedničky jsou primitivní?
Ve Fourierově transformaci máme volnost v tom, jakou primitivní odmocninu ω si vybereme. Ukažte, že Fourierovy obrazy pro různé volby ω se liší pouze pořadím složek.

Řešení

Pro celé řešení zafixujme $\omega := e^{2\pi i/n}$. Diskrétní Fourierova transformace je (lineární) zobrazení, které vektor $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ zobrazí na $X \in \mathbb{C}^n$, tž.

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk},$$

takže X je vektor souřadnic vektoru x vůči bázi $\{b_k\}_{k=0}^{n-1}$, kde

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{-jk}\right)_{j=0}^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \overline{\omega^k}, \overline{\omega^{2k}}, \ldots, \overline{\omega^{(n-1)k}})^T.$$[1]

Pak taky

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} X_k \omega^{-jk}.$$

Důvod, proč zde píšu definici DFT, je, že jsme mohli zvolit jinou primitivní n-tou odmocninu z jedné ω' (jak říká Úloha 6). Často se taky DFT zavádí bez normalizačního faktoru $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ten mi ale přijde dobré zachovat, protože pak jsou bázické vektory b_k jednotkové, a $\{b_k\}_k$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$.

Bude se nám taky hodit následující lemma vycházející ze součtu geometrické řady $\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$ *(umíte to dokázat?)*.

Lemma 1. Platí

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{mj} = \begin{cases} n & \text{pokud } m \equiv 0 \pmod n, \text{ tj. } \omega^m = 1, \\ 0 & \text{jinak (geometrická řada).} \end{cases}$$

[1] Komplexní sdružení ω^x je rovno $\overline{\omega^x} = \omega^{-x}$.

Úloha 1.

(a) **Lemma 1** nám přímo prozradí výsledek. Jedinou nenulovou složkou bude nultá:

$$F\left((x,x,\ldots,x)^T\right) = (\sqrt{n}x,0,\ldots,0)^T, \quad \text{protože}$$
$$X_k = \frac{x}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{jk}.$$

A mohli jsme to nahlédnout jen pro $x = 1$, protože F je lineární zobrazení a pro obecné x pak stačí výsledek jen vynásobit x-em.

(b) Protože $(-1)^j = \omega^{jn/2}$, máme

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(n/2+k)}.$$

Takže **Lemma 1** dá

$$F\left((1,-1,1,-1,\ldots,1,-1)^T\right) = \sqrt{n}\cdot e_{n/2}.$$

(c) Vektor $(1,0,1,0,\ldots,1,0)$ je lineární kombinací předchozích dvou výsledků, takže z linearity F

$$F\left((1,0,1,0,\ldots,1,0)^T\right) = \frac{\sqrt{n}}{2}\left(e_0 + e_{n/2}\right)$$

(d) Jde o komplexní sdružení ($\sqrt{n}$-násobku) prvního bázického vektoru $\sqrt{n}\cdot\overline{b_1} = \sqrt{n}\cdot b_{n-1}$.

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(k-1)}.$$
$$F(b_{n-1}) = \sqrt{n}\cdot e_{n-1}.$$

(e) Analogicky

$$F(b_{n-2}) = \sqrt{n}\cdot e_{n-2}.$$

d) a e) nám teď vyšly trochu hnusně kvůli volbě toho, jak počítáme DFT. Kdybychom zvolili (jak je taky běžné)

$$F'(x)_k = \sum_{j=0}^{n}\omega^{-jk},$$

vyšlo by v d) $n\cdot e_1$ a v e) $n\cdot e_2$.

Úloha 2. O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nultý a $(n/2)$-tý koeficient Fourierova obrazu?

To se dá vykoukat z úloh 1a) a 1b) (a z linearity F). Nultý koeficient $F(x)$ je $\sqrt{n}$-násobkem průměru koeficientů x.
$n/2$-tý koeficient (pro n sudé) je pak rozdíl (násobek rozdílu) hodnot na sudých a lichých koeficientech:

$$F(x)_{n/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j x_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j \text{ sudé}} x_j - \sum_{j \text{ liché}} x_j \right).$$

Úloha 3. *Obraz kanonické báze:*
V součtu pro Fourierův obraz zůstane jediný člen,

$$F\left(e_j\right)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{jk}, \quad \text{takže}$$
$$F\left(e_j\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, \omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^(n-1)j\right)^T$$

Úloha 4. *Inverz kanonické báze:*
To je jednoduché, na e_j se zobrazí j-tý bázický vektor b_j (a inverz DFT dobře známe, mimo jiné z úvodu těchto řešení).

Úloha 5. *Antisymetrie:*
Této vlastnosti jsme si vlastně už všimli v úlohách 1d) a 1e).

$$\overline{X_{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{-j(n-k)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk} = X_k.$$

Fourierův obraz antisymetrického vektoru proto musí vyjít reálný.

Úloha 6. *Odmocniny z jedničky a volba ω:*
Je-li $z^n = 1$, platí nutně $|z| = 1$, takže můžeme psát $z = e^{i\varphi}$.
Rovnost $z^n = e^{ni\varphi} = 1$ nastane právě když $n\varphi = 2\pi r$ pro nějaké $r \in \mathbb{Z}$. Existuje tak právě n odmocnin ($z_r = e^{2\pi ir/n}$ pro $r = 0, 1, \ldots n-1$, což jsou různé hodnoty – pro vyšší r se odmocniny opakují).

Odmocnina je primitivní, jestliže její řád je přesně n, tedy pro r nesoudělné s n.

$$z_r \text{ je primitivní } \Leftrightarrow \gcd(r, n) = 1.$$

Co kdybychom tedy DFT definovali s jinou primitivní n-tou odmocninou jedné ω'? ω' jde vyjádřit jako $\omega' = \omega^a$ pro nějaké a nesoudělné s n.
Tato „alternativní DFT“ F' pak zobrazuje

$$F'(x)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j (\omega')^{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{ajk} = X_{ak \bmod n}.$$

Násobení číslem $a \in Z_n^*$ (tedy a-čkem nesoudělným s n) v Z_n odpovídá permutaci čísel ze Z_n, takže Fourierovy obrazy se skutečně liší právě pořadím indexů.