Cvičení 6

Úloha 1. Kolik je booleovských funkcí n proměnných? Jak vypadají booleovské funkce dvou proměnných?

Úloha 2. Dokažte, že každou booleovskou funkci dvou proměnných lze vyjádřit pomocí hradel AND, OR a NOT.
Díky tomu lze každý booleovský obvod s nejvýše dvouvstupovými hradly upravit tak, aby používal pouze tyto tři typy hradel. Jeho hloubka (i počet použitých hradel) přitom vzroste pouze konstanta-krát.

Úloha 3. Pokračujme v předchozím cvičení: dokažte, že stačí jediný typ hradla, a to NAND (negovaný AND). Podobně by stačil NOR (negovaný OR). Existuje nějaká další funkce s touto vlastností?

Úloha 4. Sestavte hradlovou síť ze čtyř hradel NAND, která počítá XOR dvou bitů.

Úloha 5. Ukažte, že libovolnou booleovskou funkci s k vstupy lze spočítat booleovským obvodem hloubky $\mathcal{O}(k)$ s $\mathcal{O}(2^k)$ hradly. To speciálně znamená, že pro pevné k lze booleovské obvody s nejvýše k-vstupovými hradly překládat na obvody s 2-vstupovými hradly. Hloubka přitom vzroste pouze konstanta-krát.

*** Úloha 6.** Exponenciální velikost obvodu z minulého cvičení je nepříjemná, ale bohužel nevyhnutelná. Dokažte, že pro žádné k neplatí, že všechny n-vstupové booleovské funkce lze spočítat obvody s $\mathcal{O}(n^k)$ hradly *(to samozřejmě ještě nevylučuje subexponenciální velikost; dolní odhad můžete zkusit ještě zesílit).*