Fourierova transformace

Co to je
K čemu to je?
Jak se to počítá?

29. 10. 2026

O co dnes přijdete

Cvičení 5

Úloha 1. *Fourierovy obrazy:*
Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů:
a) $(x, x, \ldots, x)$ pro $x \in \mathbb{R}$ (zkuste nejdříve $x = 1$)
b) $(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$
c) $(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$
d) $(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$
e) $(\omega^0, \omega^2, \omega^4, \ldots, \omega^{2n-2})$

Úloha 2. O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nultý a $(n/2)$-tý koeficient Fourierova obrazu?

Úloha 3. *Obraz kanonické báze:*
Jak vypadá Fourierův obraz jednotkového vektoru e_i, tedy vektoru který má na i-té pozici jedničku a všude jinde 0?

Úloha 4. *Inverz kanonické báze:*
Pro každé i najděte vektor, jehož Fourierovým obrazem je e_i. Jak z toho sestrojit inverzní Fourierův obraz?

Úloha 5. *DFT reálného vektoru:*
Ukažte, že Fourierův obraz $\mathbf{y}$ reálného vektoru $\mathbf{x}$ je *antisymetrický*, tedy $\mathbf{y}_j = \overline{\mathbf{y}_{n-j}}$ pro všechny indexy j.
Jaký pak bude Fourierův obraz antisymetrického vektoru?

Úloha 6. *Odmocniny z jedničky a volba ω:*
Kolik existuje n-tých odmocnin jedničky a jak vypadají? Proč jiná čísla nejsou n-tou odmocninou z jedničky? Které z n-tých odmocnin jedničky jsou primitivní?
Ve Fourierově transformaci máme volnost v tom, jakou primitivní odmocninu ω si vybereme. Ukažte, že Fourierovy obrazy pro různé volby ω se liší pouze pořadím složek.

Připomenutí lineární algebry

Vektorový prostor může mít...

Připomenutí lineární algebry

Vektorový prostor může mít...

Lineární vlastnosti

- Existence počátku o
- Možnost sčítat vektory $(u + v)$ a násobit skalárem $(\alpha \cdot v)$
- Přitom $0 \cdot v = o$, $1 \cdot v = v$, atd.

Připomenutí lineární algebry

Vektorový prostor může mít...

Lineární vlastnosti

- Existence počátku o
- Možnost sčítat vektory $(u + v)$ a násobit skalárem $(\alpha \cdot v)$
- Přitom $0 \cdot v = o$, $1 \cdot v = v$, atd.

Topologické vlastnosti

Např. *skalární součin* $\langle u, v \rangle$ nám dává

- pojem *délky* a díky tomu i *vzdálenosti* (indukuje *normu* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$),
- pojem *úhlu* (úhel mezi u a v je roven $\theta = \cos^{-1}(\frac{\mathrm{Re}\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|})$).

Připomenutí lineární algebry

Např. v prostoru $\mathbb{C}^n$...

Sčítání vektorů a násobení skalárem funguje po složkách.

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$,
- $\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Můžeme definovat *standardní* skalární součin.

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + \cdots + x_n \cdot \overline{y_n}$.

($\overline{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z: $\overline{a + bi} = a - bi$)

Připomenutí lineární algebry

V prostoru komplexních funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$

- funkce můžeme sčítat: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

Připomenutí lineární algebry

V prostoru komplexních funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$

- funkce můžeme sčítat: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

A analogicky můžeme definovat taky standardní skalární součin:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

Připomenutí lineární algebry

V prostoru komplexních funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$

- funkce můžeme sčítat: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

A analogicky můžeme definovat taky standardní skalární součin:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$$

Integrál může vyjít nekonečný, a nemusí ani být definovaný!
Proto se omezujeme na podprostory $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$. Např. na prostor L^2 (prostor měřitelných funkcí s konečnou normou, kde identifikujeme *skoro všude* stejné funkce).

Připomenutí lineární algebry

Báze

Máme-li nějakou bázi $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ prostoru $\mathbb{C}^k$, můžeme k libovolnému vektoru $v \in \mathbb{C}^k$ najít jeho souřadnice $(s_1, \ldots, s_k)$ vůči bázi B.

Vektor v lze samozřejmě ze souřadnic zrekonstruovat.

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot b_i$$

Připomenutí lineární algebry

Ortonormální báze

Báze $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ je *ortonormální*, pokud

- každý vektor b_i má jednotkovou délku (tj. $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$) a
- každé dva různé bázické vektory b_i, b_j jsou navzájem kolmé (ortogonální)
  (tj. $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ kdykoli $i \neq j$).

Připomenutí lineární algebry

Ortonormální báze

Báze $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ je *ortonormální*, pokud

- každý vektor b_i má jednotkovou délku (tj. $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$) a
- každé dva různé bázické vektory b_i, b_j jsou navzájem kolmé (ortogonální)
  (tj. $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ kdykoli $i \neq j$).

$$\text{Pak} \quad v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, b_j \rangle \, b_j.$$

Připomenutí lineární algebry

Ortonormální báze

Báze $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ je *ortonormální*, pokud

- každý vektor b_i má jednotkovou délku (tj. $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$) a
- každé dva různé bázické vektory b_i, b_j jsou navzájem kolmé (ortogonální)
  (tj. $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ kdykoli $i \neq j$).

$$\text{Pak} \quad v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, b_j \rangle \, b_j.$$

Pro libovolný vektor v a jeho souřadnice $(s_1, \ldots, s_k)$ vůči b platí:

$$\langle v, b_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} s_j \cdot b_j, b_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} s_j \langle b_j, b_i \rangle = s_i \langle b_i, b_i \rangle = s_i.$$

Takže $s_i = \langle v, b_i \rangle$

Dostáváme se k Fourierovi...

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Tvoří (spočetně nekonečný) **ortogonální systém**. *A Hilbertovu bázi prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Tvoří (spočetně nekonečný) **ortogonální systém**. *A Hilbertovu bázi prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Takže každá taková funkce f má unikátní reprezentaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \right).$$

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

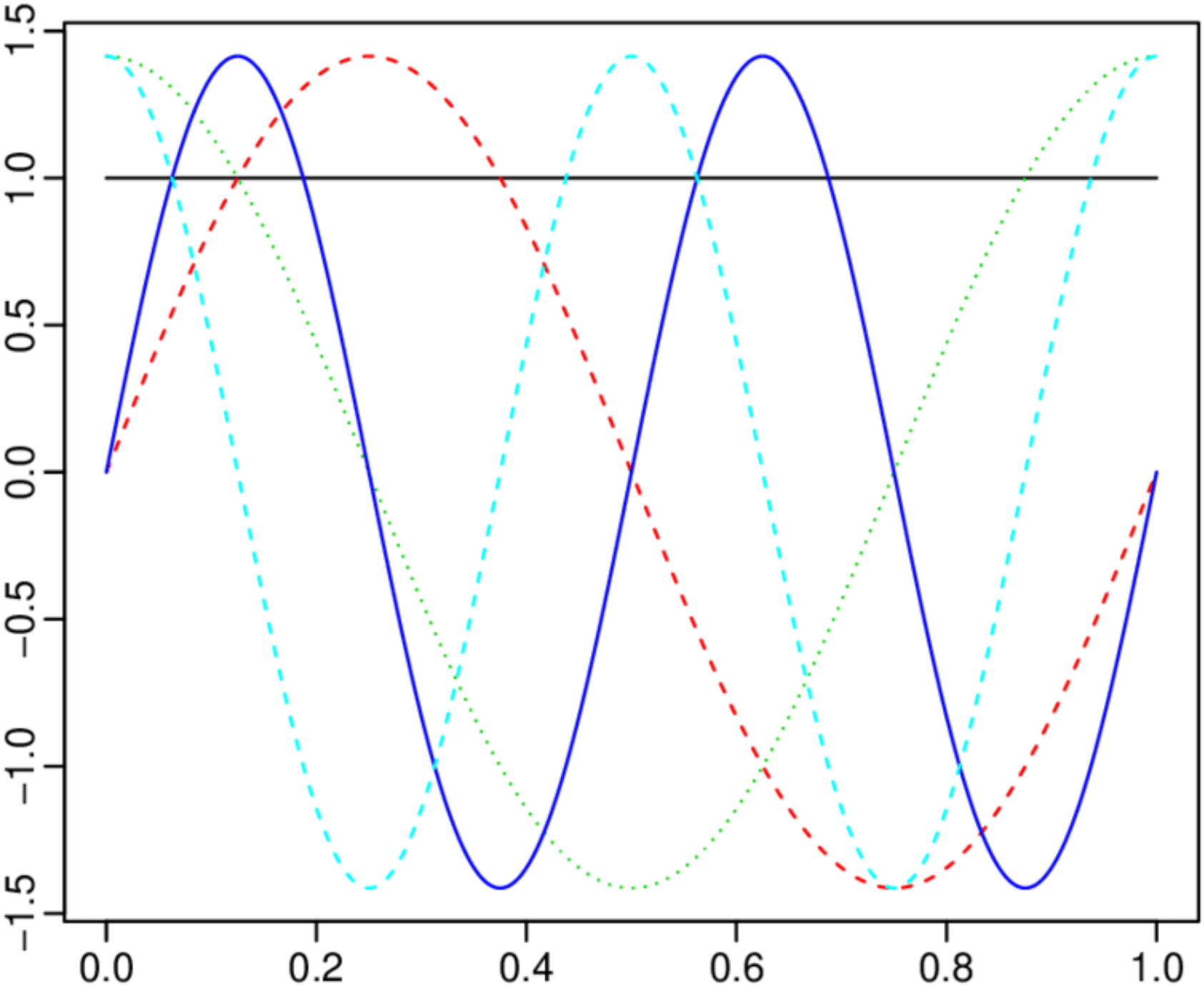
$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

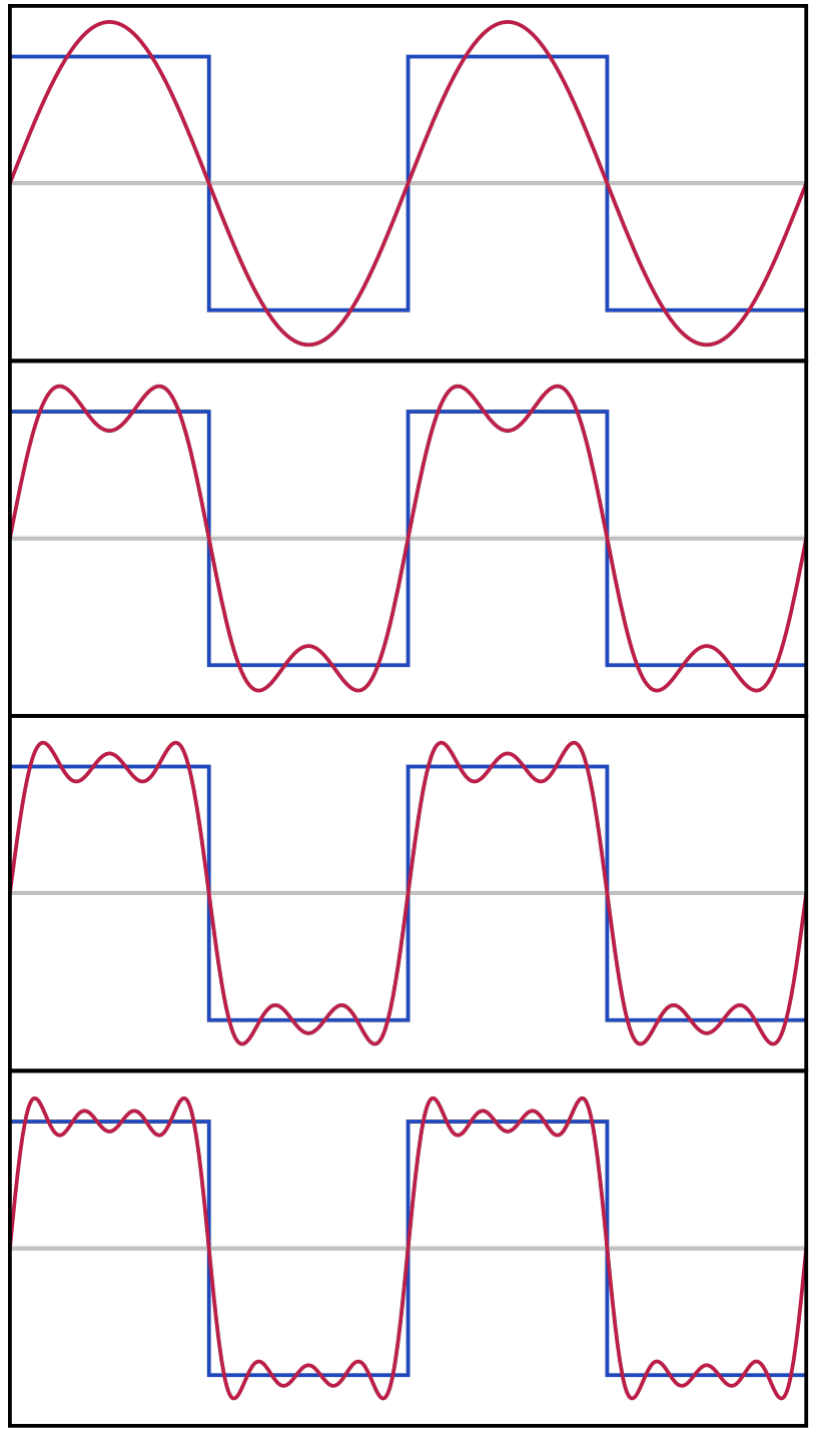
Tvoří (spočetně nekonečný) **ortogonální systém**. *A Hilbertovu bázi prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Takže každá taková funkce f má unikátní reprezentaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \right).$$

$$a_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$


1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



Historická vsuvka



Joseph Fourier v roce 1807 vyhrál cenu Francouzské Akademie za řešení rovnice vedení tepla.

To se mu podařilo právě díky rozvoji funkce na řadu trigonometrických funkcí.

Historická vsuvka



Joseph Fourier v roce 1807 vyhrál cenu Francouzské Akademie za řešení rovnice vedení tepla.

To se mu podařilo právě díky rozvoji funkce na řadu trigonometrických funkcí.

Ukázal tak například, proč si (ve Francii) chcete zakopat vodovodní trubky zhruba dva až tři metry pod zem: časový posun teplot je zde zhruba půl roku, takže je tu nejtepleji v zimě a nejstudeněji v létě.

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

Co kdybychom místo n dosadili libovolné reálné číslo? Dostaneme pak (nespočetně nekonečnou) bázi nějakého obecnějšího prostoru?

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

Co kdybychom místo n dosadili libovolné reálné číslo? Dostaneme pak (nespočetně nekonečnou) bázi nějakého obecnějšího prostoru?

Ano, dostaneme.

Ale půjdeme na to trochu chytřeji...

(Spojitá) Fourierova transformace

Věta

Množina funkcí

$$\frac{1}{2\pi} e^{itx} \quad (t \in \mathbb{R})$$

tvoří ortonormální systém.

(Spojitá) Fourierova transformace

Věta

Množina funkcí

$$\frac{1}{2\pi} e^{itx} \quad (t \in \mathbb{R})$$

tvoří ortonormální systém.

Vzpomeňme na Eulerův vzorec:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Který naráz implikuje

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$
$$\cos nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}.$$

(Spojitá) Fourierova transformace

Fourierova transformace $\hat{f}$ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je opět funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(Spojitá) Fourierova transformace

Fourierova transformace $\hat{f}$ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je opět funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

V bodě t se vyhodnotí na koeficient f u bázického vektoru $\frac{e^{itx}}{2\pi}$, tj.

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx.$$

(Spojitá) Fourierova transformace

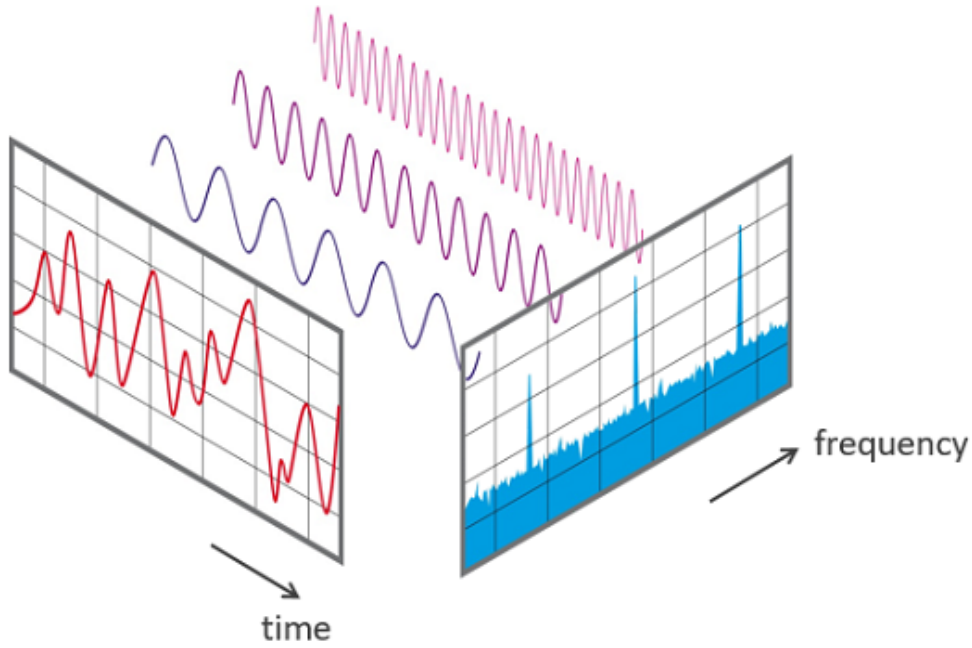
Fourierova transformace $\hat{f}$ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je opět funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

V bodě t se vyhodnotí na koeficient f u bázického vektoru $\frac{e^{itx}}{2\pi}$, tj.

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx.$$

Inverz: zpětným dosazením koeficientů dostaneme inverzní transformaci (pro „dobře vychované“ f):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$$


frequency
time

Fourierova transformace: vyšší dimenze

Přechod k bázi $\{e^{itx}\}$ namísto trigonometrických funkcí nám navíc umožňuje přímočaré zobecnění na funkce libovolné (konečné) dimenze.

$$\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\}$$

Fourierova transformace: vyšší dimenze

Přechod k bázi $\{e^{itx}\}$ namísto trigonometrických funkcí nám navíc umožňuje přímočaré zobecnění na funkce libovolné (konečné) dimenze.

$$\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\}$$

Pro $t \in \mathbb{R}^d$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

Fourierova transformace: vyšší dimenze

Přechod k bázi $\{e^{itx}\}$ namísto trigonometrických funkcí nám navíc umožňuje přímočaré zobecnění na funkce libovolné (konečné) dimenze.

$$\{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\}$$

Pro $t \in \mathbb{R}^d$

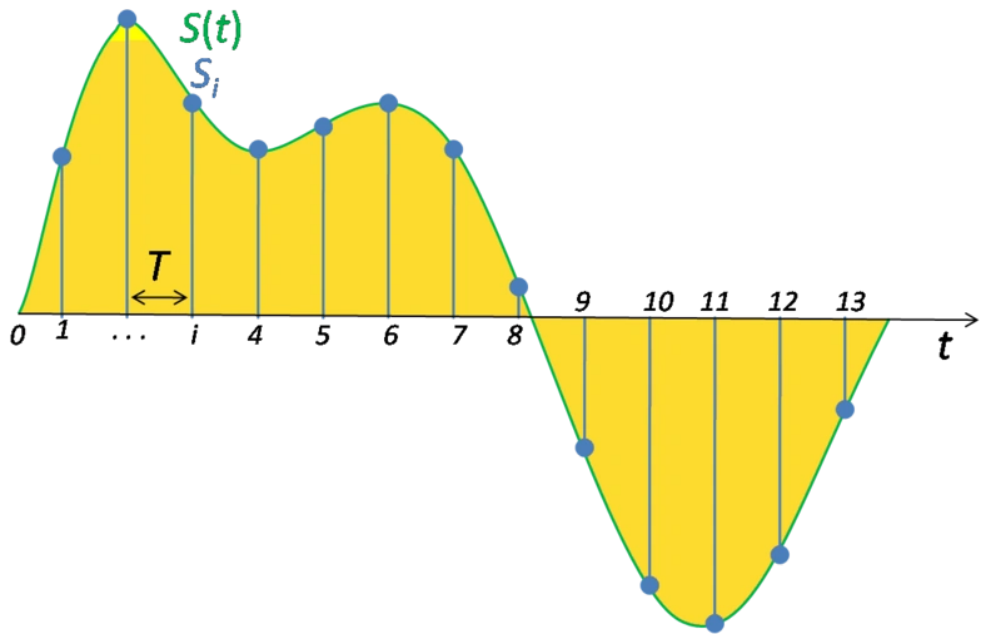
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

Inverzní zobrazení je pak

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} dt.$$

Zpátky na Zem

Počítač nikdy nepracuje přímo se spojitou funkcí. Intenzitu signálu měříme v N pravidelně rozmístěných bodech, čímž dostaneme vektor hodnot $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.



Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortonormální bázi
$\{\frac{1}{\sqrt{N}}(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortonormální bázi
$\{\frac{1}{\sqrt{N}}(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{N-1})$:

$$F(x)_t = X_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}tn}$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortonormální bázi
$\{\frac{1}{\sqrt{N}}(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{N-1})$:

$$F(x)_t = X_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}tn}$$

Inverz:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} X_t \cdot e^{\frac{i2\pi}{N}tn}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Zapsáno maticově ($\omega := e^{-\frac{i2\pi}{N}}$):

$$F(x) = F \cdot x = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \omega^{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Zapsáno maticově ($\omega := e^{-\frac{i2\pi}{N}}$):

$$F(x) = F \cdot x = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \omega^{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Matice F je unitární a symetrická, takže F^{-1} dostaneme jednoduše komplexním sdružením všech prvků.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Často se ale **DFT** vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ zavádí jako

$$F(x)_t = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Často se ale **DFT** vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ zavádí jako

$$F(x)_t = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn}.$$

Explicitní vzorec pro inverz je potom

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N} tn}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT): vyšší dimenze

V dimenzi d, tj. pro vektory $(x_{n_1,n_1,\ldots,n_d})$, $n_k \in [N_k]$ transformace taky funguje.

Tady

$$X_{t_1,\ldots,t_d} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(e^{-\frac{i2\pi}{N_1} t_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left(e^{-\frac{i2\pi}{N_2} t_2 n_2} \cdots \sum_{n_d=0}^{N_d-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_d} t_d n_d} \cdot x_{n_1,n_2,\ldots,n_d} \right) \right)$$

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \ldots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc *odmocnina jedničky* $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc *odmocnina jedničky* $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc *odmocnina jedničky* $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \dots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \dots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}), \omega^2)$.

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc *odmocnina jedničky* $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \dots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \dots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}), \omega^2)$.
- Poskládáme výsledné DFT: iterujeme $j = 0, \dots, N/2 - 1$:
  - $X_j \leftarrow s_j + \omega^j \cdot \ell_j$
  - $X_{j+N/2} \leftarrow s_j - \omega^j \cdot \ell_j$

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

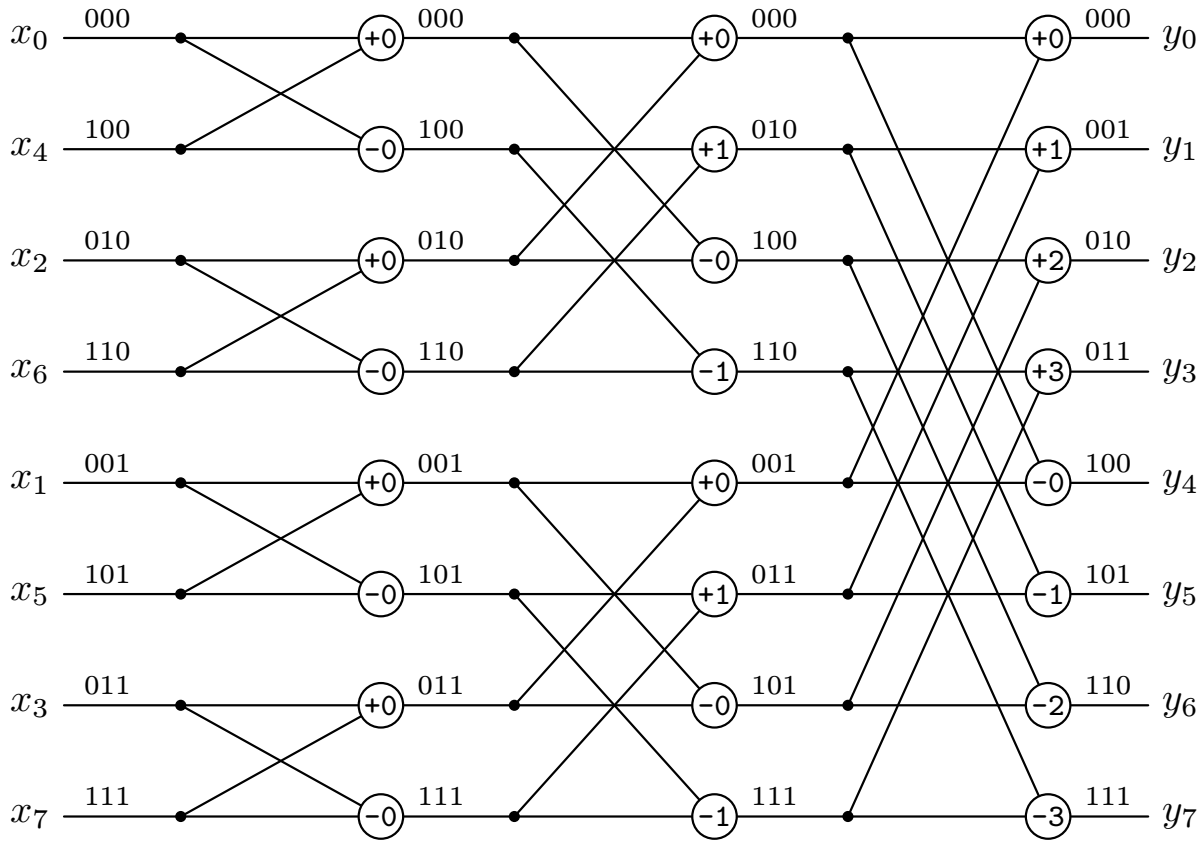
DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc *odmocnina jedničky* $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \dots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \dots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}), \omega^2)$.
- Poskládáme výsledné DFT: iterujeme $j = 0, \dots, N/2 - 1$:
  - $X_j \leftarrow s_j + \omega^j \cdot \ell_j$
  - $X_{j+N/2} \leftarrow s_j - \omega^j \cdot \ell_j$

$\Rightarrow$ Díky tomu dokážeme DFT počítat v čase $\mathcal{O}(N \log N)$.

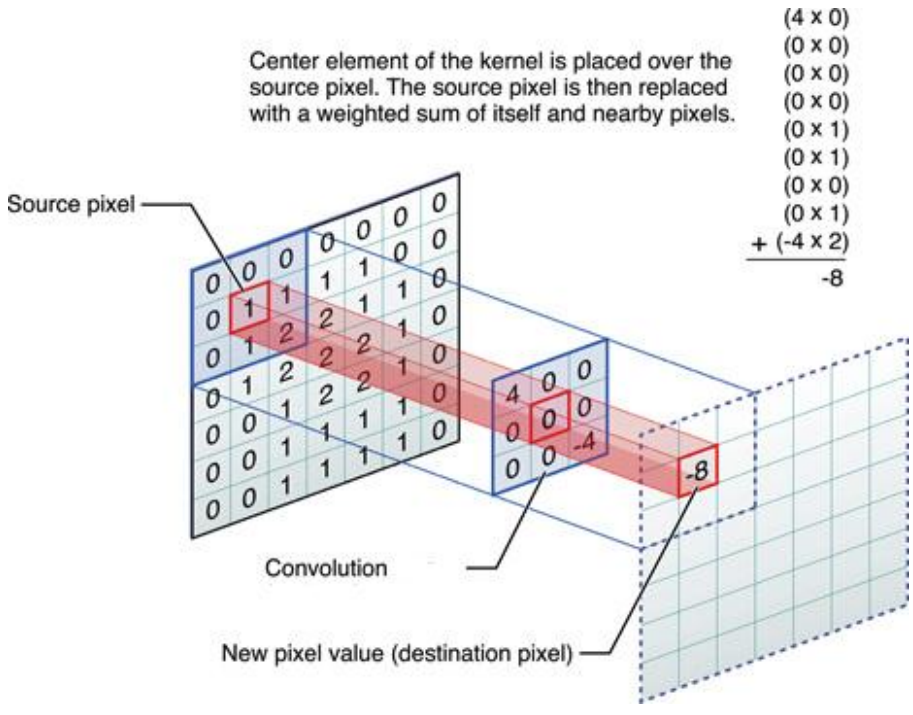
FFT jako obvod



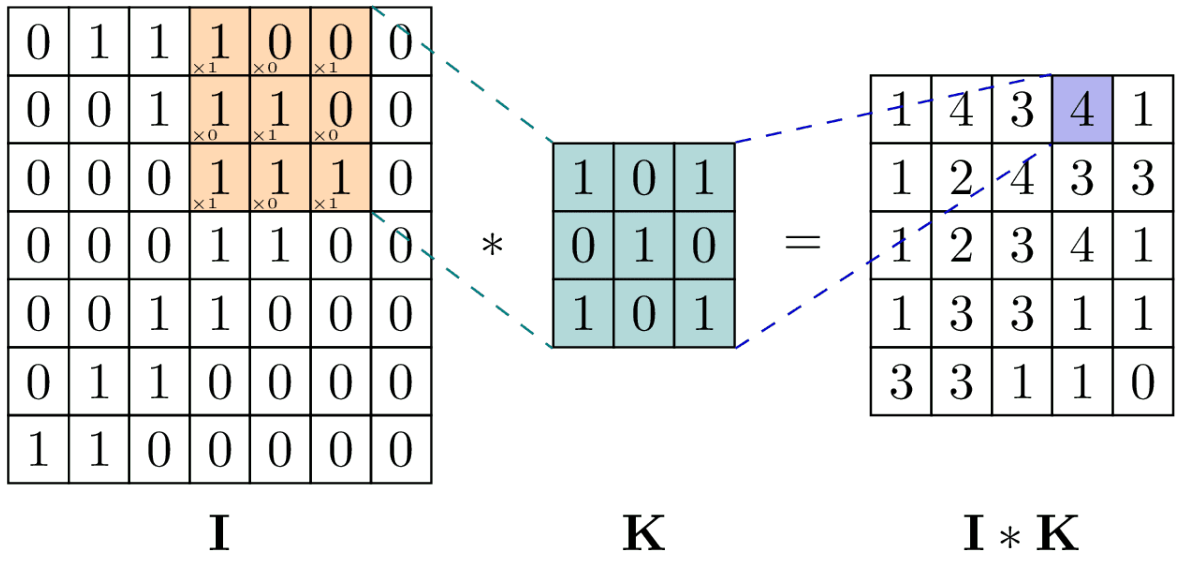
(obrázek z Průvodce)

Konvoluce

Konvoluce


Center element of the kernel is placed over the source pixel. The source pixel is then replaced with a weighted sum of itself and nearby pixels.
(4 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 1)
(0 x 1)
(0 x 0)
(0 x 1)
+ (-4 x 2)
-8
Source pixel
Convolution
New pixel value (destination pixel)

Konvoluce


0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0
×1 ×0 ×1
×0 ×1 ×0
×1 ×0 ×1
*
1 0 1
0 1 0
1 0 1
=
1 4 3 4 1
1 2 4 3 3
1 2 3 4 1
1 3 3 1 1
3 3 1 1 0
I
K
I ∗ K

Konvoluce

Spojitá konvoluce:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

Diskrétní konvoluce:

$$(f * g)(n) = \sum_m f(m)g(n-m) = \sum_m f(n-m)g(m)$$

Konvoluce

Input image



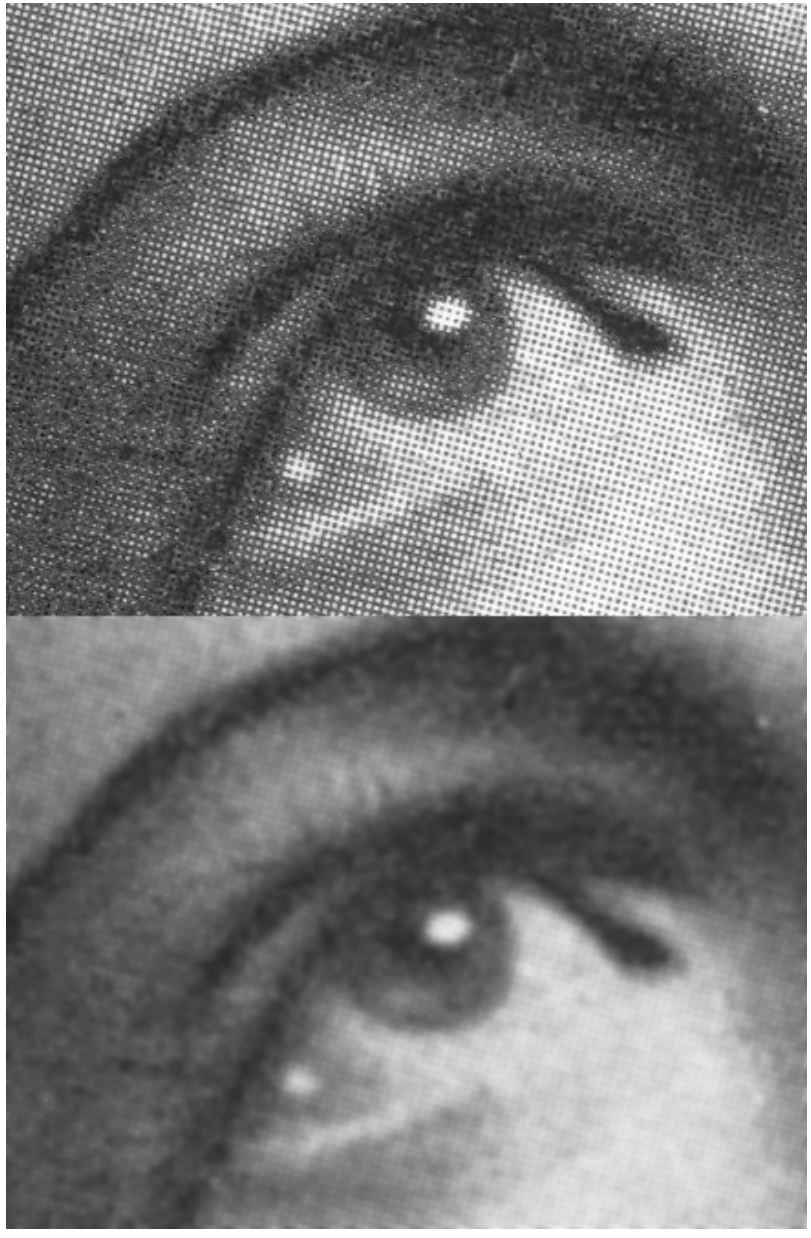
Convolution Kernel

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Feature map



Konvoluce



FT a konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

FT a konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

$$\hat{f}(t) = (f * e^{i\langle t,x\rangle})(0)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

FT a konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

$$\hat{f}(t) = (f * e^{i\langle t,x\rangle})(0)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Důsledek: Konvoluci dokážeme počítat rychle pomocí FFT.

Důkaz, že $\widehat{a * b} = \hat{a} \cdot \hat{b}$

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_\ell \cdot \widehat{b}_\ell &= \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{\ell i} a_i \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{\ell j} a_j \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{\ell (i+j) (\mathrm{mod}\, N)} a_i b_j \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{\ell i} a_k b_{(i-k) \bmod N},
\end{aligned}$$

což se opravdu rovná

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{a * b} \right)_\ell &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{\ell i} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{(i-k) \bmod N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{\ell i} a_k b_{(i-k) \bmod N}.
\end{aligned}$$

Aplikace: násobení polynomů

Jak se násobí polynomy?

$$\left(\sum_{j=0}^{N} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{2N} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j.$$

Aplikace: násobení polynomů

Jak se násobí polynomy?

$$\left(\sum_{j=0}^{N} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{2N} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j.$$

Jde o konvoluci jejich koeficientů!

Aplikace: násobení polynomů

Jak se násobí polynomy?

$$\left(\sum_{j=0}^{N} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{2N} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j.$$

Jde o konvoluci jejich koeficientů!
A díky tomu můžeme polynomy násobit v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ pomocí FFT.

Dekonvoluce

Fourierova transformace nám ale umožní taky počítat *inverzní* transformaci ke konvoluci.

$$\hat{f} = \widehat{(f * g)}/\hat{g}$$

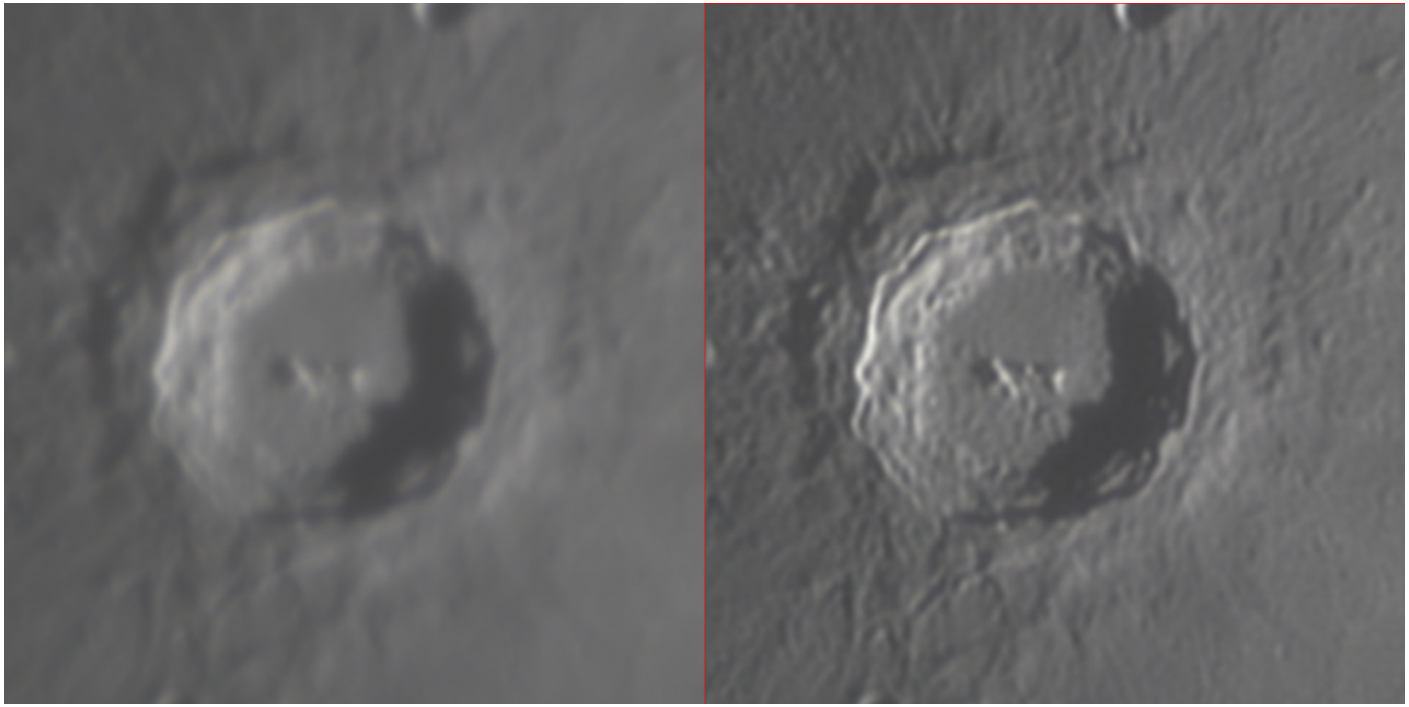
Dekonvoluce

Fourierova transformace nám ale umožní taky počítat *inverzní* transformaci ke konvoluci.

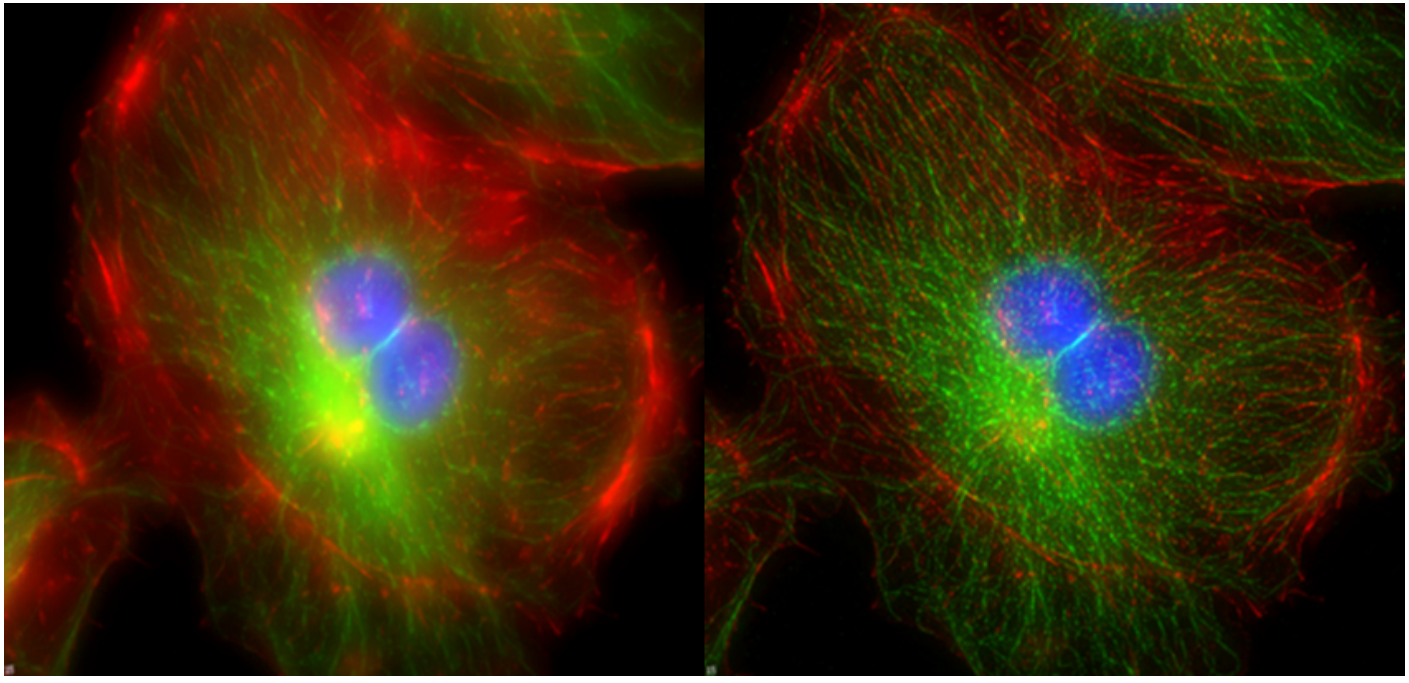
$$\hat{f} = \widehat{(f * g)}/\hat{g}$$

(samozřejmě za určitých podmínek na f a g)

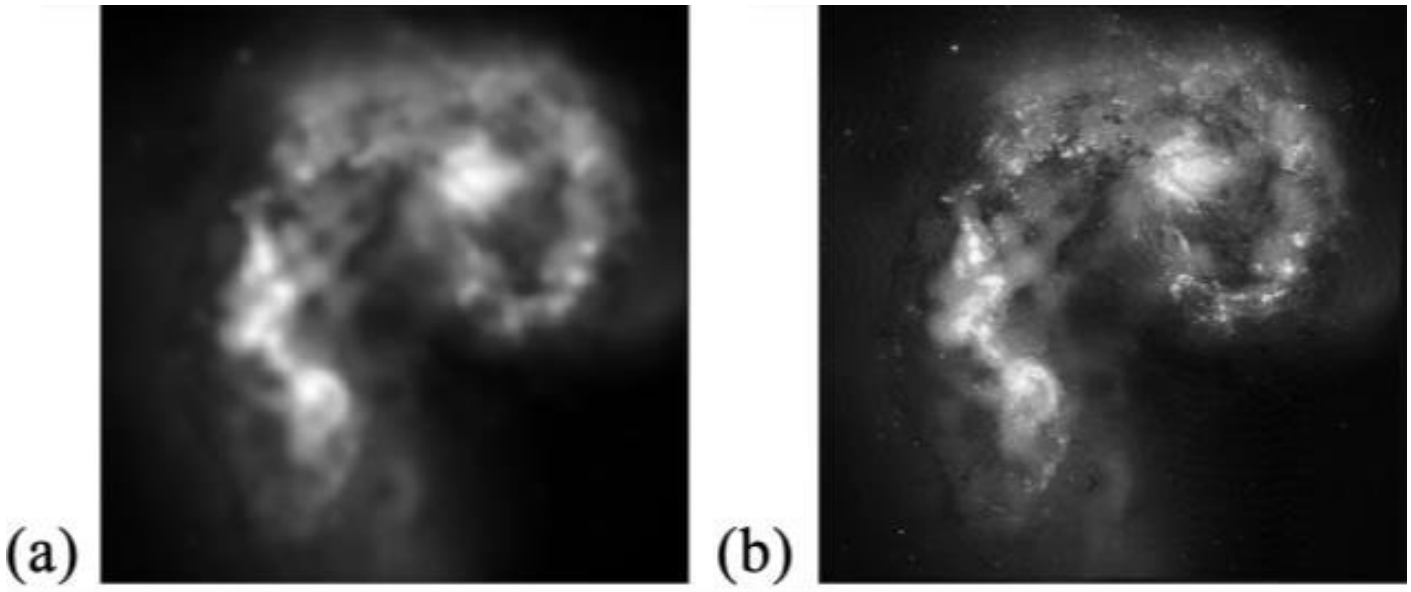
Dekonvoluce



Dekonvoluce



Dekonvoluce



Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

K čemu je dobrá?

- Zpracování signálů,
- zpracování obrazu,
- rychlé násobení polynomů (a čísel),
- ... mnoho dalších aplikací ...

Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

K čemu je dobrá?

- Zpracování signálů,
- zpracování obrazu,
- rychlé násobení polynomů (a čísel),
- ... mnoho dalších aplikací ...

Jak se počítá?

- Pomocí algoritmu **FFT** (Fast Fourier transform).

Reklama: kde se dozvědět víc

O teorii:

- NMMA331: Úvod do funkcionální analýzy
- HARD MODE: NMAG533: Principy harmonické analýzy

Reklama: kde se dozvědět víc

O teorii:

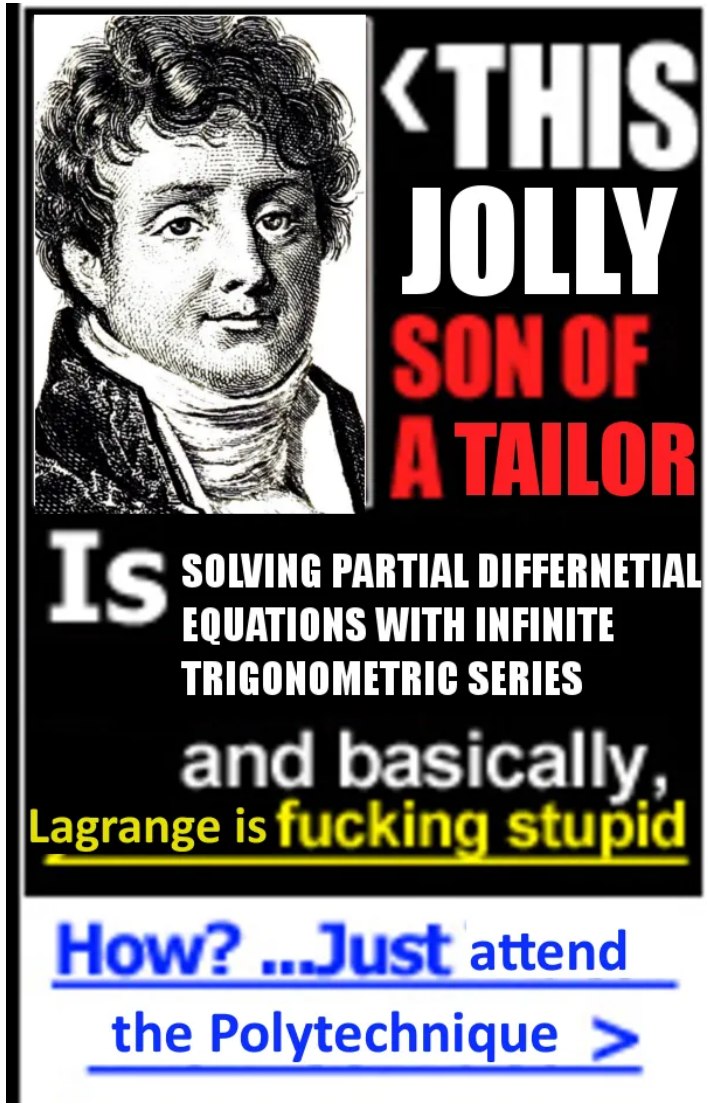
- NMMA331: Úvod do funkcionální analýzy
- HARD MODE: NMAG533: Principy harmonické analýzy
- NMNV531: Inverzní úlohy a regularizace

Reklama: kde se dozvědět víc

O aplikacích:

- NPGR002: Digitální zpracování obrazu
- NPFL133: Číslicové zpracování zvukových signálů

Konec.


‹THIS
JOLLY
SON OF
A TAILOR
Is SOLVING PARTIAL DIFFERNETIAL EQUATIONS WITH INFINITE TRIGONOMETRIC SERIES
and basically,
Lagrange is fucking stupid
How? ...Just attend
the Polytechnique >