Fourierova transformace

Co to je
K čemu to je?
Jak se to počítá?

6. 11. 2023

Připomenutí lineární algebry

Prostor může mít...

Lineární vlastnosti

- Existence počátku o
- Možnost sčítat vektory $(u + v)$ a násobit skalárem $(\alpha \cdot v)$
- Přitom $0 \cdot v = o$, $1 \cdot v = v$, atd.

Topologické vlastnosti

Např. *skalární součin* $\langle u, v \rangle$ nám dává

- pojem *délky* a díky tomu i *vzdálenosti* (indukuje *normu* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$),
- pojem *úhlu* (úhel mezi u a v je roven $\theta = \cos^{-1}(\frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|})$).

Připomenutí lineární algebry

Např. v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^k$...

Sčítání vektorů a násobení skalárem funguje po složkách.

- $(x_1, x_2, \dots, x_k) + (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k)$,
- $\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_k) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_k)$.

Můžeme definovat *standardní* skalární součin.

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_k \cdot y_k$.

Připomenutí lineární algebry

Báze

Máme-li nějakou bázi $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ prostoru $\mathbb{R}^k$, můžeme k libovolnému vektoru $v \in \mathbb{R}^k$ najít jeho souřadnice $(s_1, \ldots, s_k)$ vůči bázi B.

Vektor v lze samozřejmě ze souřadnic zrekonstruovat.

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot b_i$$

Připomenutí lineární algebry

Ortonormální báze

Báze $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ je *ortonormální*, pokud

- každý vektor b_i má jednotkovou velikost (tj. $\|b_i\| = \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle} = 1$) a
- každé dva různé bázické vektory b_i, b_j jsou navzájem kolmé (ortogonální)
  (tj. $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ kdykoli $i \neq j$)

Pak pro libovolný vektor v a jeho souřadnice $(s_1, \dots, s_k)$ vůči b platí:

$$\langle v, b_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} s_j \cdot b_j, b_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} s_j \langle b_j, b_i \rangle = s_i \langle b_i, b_i \rangle = s_i.$$

Takže $s_i = \langle v, b_i \rangle$ a

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, b_j \rangle b_j.$$

Prostory funkcí

I třída reálných funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ tvoří lineární prostor:

- funkce můžeme sčítat: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

Dokonce analogicky můžeme definovat skalární součin:

Prostory funkcí

I třída reálných funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ tvoří lineární prostor:

- funkce můžeme sčítat: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

Dokonce analogicky můžeme definovat skalární součin:
Tak jako jsme v $\mathbb{R}^k$ měli $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot v_i$,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$$

Prostory funkcí

I třída reálných funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ tvoří lineární prostor:

- funkce můžeme sčítat: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- umíme násobit skalárem: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
- Konstantně nulová funkce $f(x) = 0$ pak tvoří počátek prostoru.

Dokonce analogicky můžeme definovat skalární součin:
Tak jako jsme v $\mathbb{R}^k$ měli $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot v_i$,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$$

POZOR: Integrál může vyjít nekonečný, a nemusí ani být definovaný!
Proto takový skalární součin funguje jen na podprostorech $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Např. na lineárním prostoru L^2 (prostoru měřitelných funkcí s konečnou normou, kde identifikujeme *skoro všude* stejné funkce).

Prostory funkcí

Dostáváme se k Fourierovi...

Prostory funkcí

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Tvoří (spočetně nekonečnou) **ortogonální bázi** *prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Prostory funkcí

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Tvoří (spočetně nekonečnou) **ortogonální bázi** *prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Takže každá taková funkce f má unikátní reprezentaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Prostory funkcí

Dostáváme se k Fourierovi...

Věta

Množina funkcí

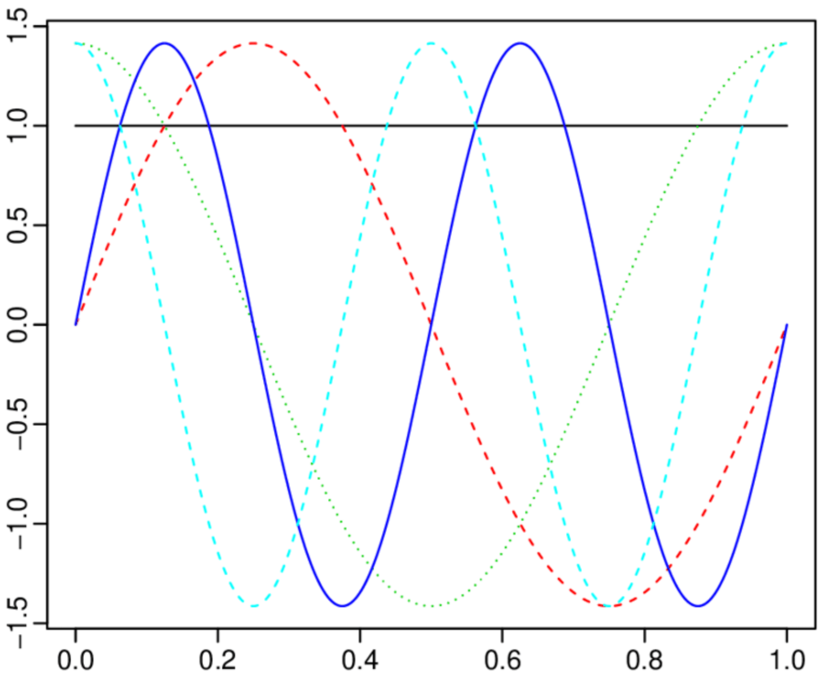
$$\phi_0 = \frac{1}{2\ell}, \quad \phi_n = \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Tvoří (spočetně nekonečnou) **ortogonální bázi** *prostoru (2ℓ)-periodických L^2 funkcí (resp. prostoru $L^2(-\ell, \ell)$).*

Takže každá taková funkce f má unikátní reprezentaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2\ell} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

$$a_n = \frac{\langle f, \phi_n\rangle}{\langle \phi_n, \phi_n\rangle}$$



1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Historická vsuvka

Joseph Fourier v roce 1807 vyhrál cenu Francouzské Akademie za řešení rovnice vedení tepla.

To se mu podařilo právě díky rozvoji funkce na řadu trigonometrických funkcí.

Ukázal tak například, proč si (ve Francii) chcete zakopat vodovodní trubky zhruba dva až tři metry pod zem: časový posun teplot je zde zhruba půl roku, takže je tu nejtepleji v zimě a nejstudeněji v létě.

Historická vsuvka

Vzpomeňme, že podobný koncept už známe od Taylora (z roku 1715):

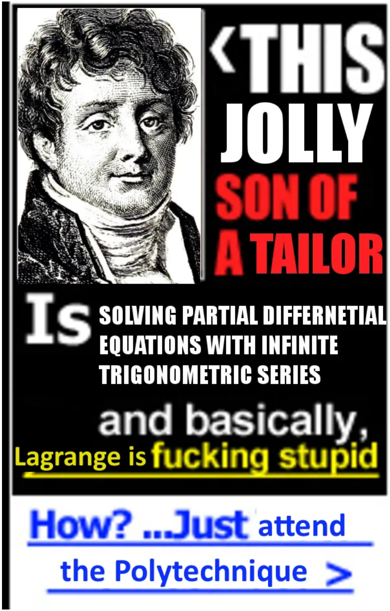
Taylor, rozvoj na polynom:

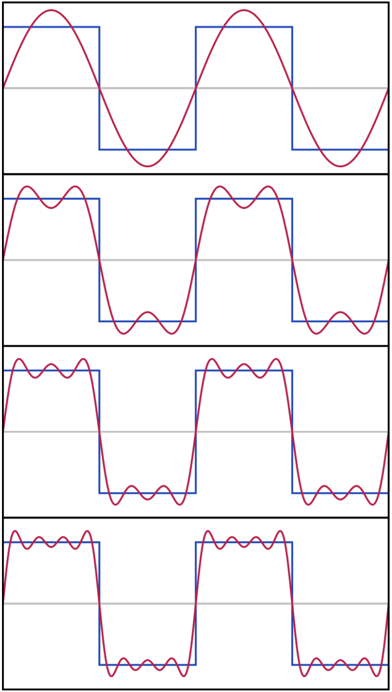
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Fourier, rozvoj na trigonometrické funkce:

$$\frac{\langle f, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}\phi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}\phi_n(x) + \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}\psi_n(x)\right)$$

Historická vsuvka





(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

Co kdybychom místo n dosadili libovolné reálné číslo? Dostaneme pak (nespočetně nekonečnou) bázi nějakého obecnějšího prostoru?

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

Co kdybychom místo n dosadili libovolné reálné číslo? Dostaneme pak (nespočetně nekonečnou) bázi nějakého obecnějšího prostoru?

Spoiler: *Ano, dostaneme.*

(Spojitá) Fourierova transformace

Proč se omezovat na funkce typu $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$?

Co kdybychom místo n dosadili libovolné reálné číslo? Dostaneme pak (nespočetně nekonečnou) bázi nějakého obecnějšího prostoru?

Spoiler: *Ano, dostaneme.*

Ale půjdeme na to trochu chytřeji. Exponenciála nám hodně usnadní práci...

(Spojitá) Fourierova transformace

Pomohou komplexní čísla.

Vzpomeňme na Eulerův vzorec:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Který naráz implikuje

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Proto nepřekvapí, že (nespočetně nekonečná) množina $\{e^{itx} \mid t \in \mathbb{R}\}$ generuje dost obecný prostor funkcí. Vektory (funkce) této „báze“ jsou po dvou ortogonální (ve smyslu dříve definovaného skalárního součinu).

(Spojitá) Fourierova transformace

Místo reálných funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ teď můžeme funkce uvažovat jako komplexní $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$.

(Spojitá) Fourierova transformace

Místo reálných funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ teď můžeme funkce uvažovat jako komplexní $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$.

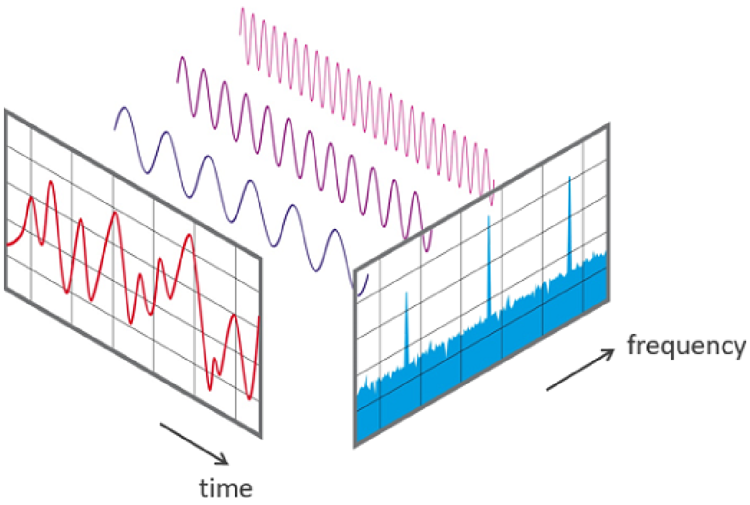
Fourierova transformace $\hat{f}$ funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je opět funkce $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

V bodě t se vyhodnotí na koeficient f u bázického vektoru e^{itx}, tj.

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx.$$

Inverz: zpětným dosazením koeficientů dostaneme inverzní transformaci (pro „dobře vychované“ f):

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt$$


frequency
time

Fourierova transformace: vyšší dimenze

Přechod k bázi $\{e^{itx}\}$ namísto trigonometrických funkcí nám navíc umožňuje přímočaré zobecnění na funkce libovolné (konečné) dimenze.

$$\{f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}\}$$

Pro $t \in \mathbb{R}^k$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

Fourierova transformace: vyšší dimenze

Přechod k bázi $\{e^{itx}\}$ namísto trigonometrických funkcí nám navíc umožňuje přímočaré zobecnění na funkce libovolné (konečné) dimenze.

$$\{f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}\}$$

Pro $t \in \mathbb{R}^k$

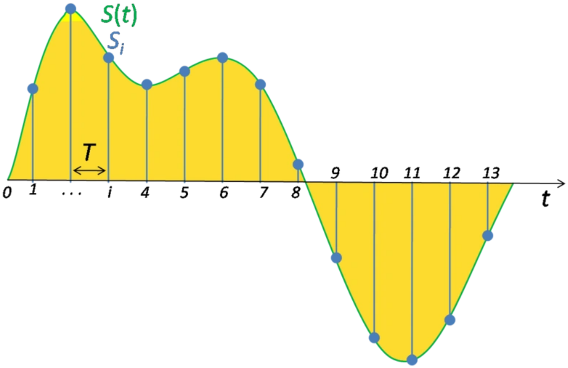
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

Inverzní zobrazení je pak

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(t) e^{i\langle t,x\rangle} dt.$$

Zpátky na Zem

Počítač nikdy nepracuje přímo se spojitou funkcí. Intenzitu signálu měříme v N pravidelně rozmístěných bodech, čímž dostaneme vektor hodnot $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.



Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortogonální bázi $\{(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortogonální bázi $\{(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{N-1})$:

$$F(x)_t = X_t = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}tn}$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortogonální bázi $\{(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{N-1})$:

$$F(x)_t = X_t = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}tn}$$

Explicitní vzorec pro inverz je

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t \cdot e^{\frac{i2\pi}{N}tn}.$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Fourierova transformace zcela analogicky funguje v tomto diskrétním případě.
Zde máme N-prvkovou ortogonální bázi $\{(e^{\frac{i2\pi}{N}tn})_n \mid 0 \leq t \leq N-1\}$.

Diskrétní Fourierova transformace vektoru $(x_0, \ldots, x_{N-1})$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{N-1})$:

$$F(x)_t = X_t = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}tn}$$

Explicitní vzorec pro inverz je

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t \cdot e^{\frac{i2\pi}{N}tn}.$$

Takže $F(X)^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F(X)}$ (uvidíme, že inverzní transformaci dokážeme počítat stejně jako tu standardní).

Diskrétní Fourierova transformace (DFT): vyšší dimenze

V dimenzi d, tj. pro vektory $(x_{n_1,n_1,\ldots,n_d})$, $n_k \in [N_k]$ transformace taky funguje.

Tady

$$X_{t_1,\ldots,t_d} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \left(e^{-\frac{i2\pi}{N_1} t_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left(e^{-\frac{i2\pi}{N_2} t_2 n_2} \cdots \sum_{n_d=0}^{N_d-1} e^{-\frac{i2\pi}{N_d} t_d n_d} \cdot x_{n_1,n_2,\ldots,n_d} \right)\right.$$

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc „*charakter*" $\omega = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \dots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \dots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}), \omega^2)$.
- Poskládáme výsledné DFT: iterujeme $j = 0, \dots, N/2 - 1$:
  - $X_j \leftarrow s_j + \omega^j \cdot \ell_j$
  - $X_{j+N/2} \leftarrow s_j - \omega^j \cdot \ell_j$

Rychlá Fourierova transformace (FFT)

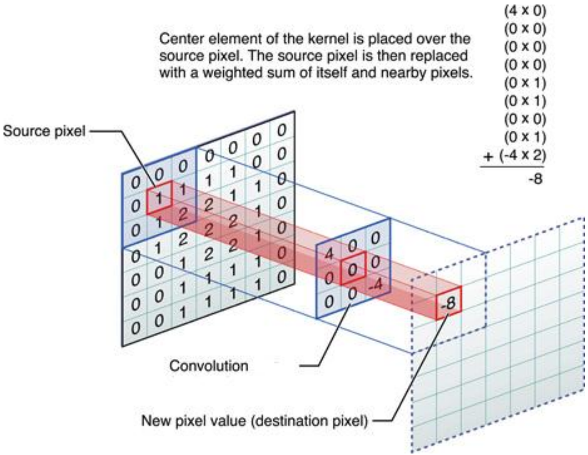
DFT $F(x_0, \dots x_{N-1}) = (\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N} tn})_t$ N-složkového vektoru (pro $N = 2^k$) můžeme počítat metodou rozděl a panuj:

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \dots, x_{N-1})$
Navíc „*charakter*“ $\omega = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$.

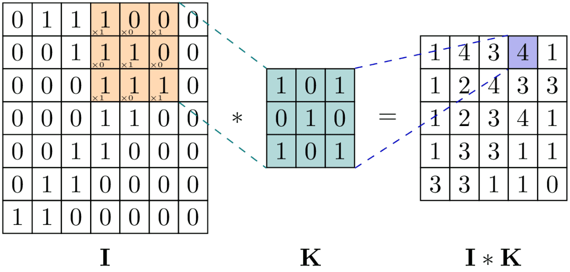
- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \dots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \dots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \dots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \dots, x_{N-1}), \omega^2)$.
- Poskládáme výsledné DFT: iterujeme $j = 0, \dots, N/2 - 1$:
  - $X_j \leftarrow s_j + \omega^j \cdot \ell_j$
  - $X_{j+N/2} \leftarrow s_j - \omega^j \cdot \ell_j$

$\Rightarrow$ Díky tomu dokážeme DFT počítat v čase $\mathcal{O}(N \log N)$.

Konvoluce


Center element of the kernel is placed over the source pixel. The source pixel is then replaced with a weighted sum of itself and nearby pixels.
(4 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 1)
(0 x 1)
(0 x 0)
(0 x 1)
+ (-4 x 2)
-8
Source pixel
Convolution
New pixel value (destination pixel)

Konvoluce


0 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0
×1 ×0 ×1
×0 ×1 ×0
×1 ×0 ×1
∗
1 0 1
0 1 0
1 0 1
=
1 4 3 4 1
1 2 4 3 3
1 2 3 4 1
1 3 3 1 1
3 3 1 1 0
I
K
I ∗ K

Konvoluce

Spojitá konvoluce:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

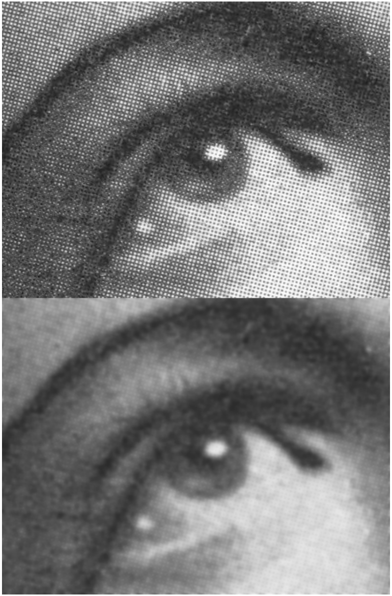
Diskrétní konvoluce:

$$(f * g)(n) = \sum_m f(m) g(n-m) = \sum_m f(n-m) g(m)$$

Konvoluce

Input image	Convolution Kernel	Feature map
	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	

Konvoluce



Konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

Konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

$$\hat{f}(t) = (f * e^{i\langle t,x\rangle})(0)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Konvoluce

Vzpomeňme na definici Fourierovy transformace:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x \rangle} dx$$

a porovnejme s definicí konvoluce

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

$$\hat{f}(t) = (f * e^{i\langle t,x \rangle})(0)$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Důsledek: Konvoluci dokážeme počítat rychle pomocí FFT.

Konvoluce

Důkaz. Upravujme

$$\mathcal{F}\left[f(x) * g(x)\right](u) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t\right] e^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x \overset{a)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\int_{\mathbb{R}} g(x-t) e^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t =$$

$$\overset{b)}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[e^{-2\pi i t u} G(u)\right] \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i t u} \mathrm{d}t \cdot G(u) = F(u) \cdot G(u),$$

(tohle je screenshot ze zápisků studentů Jaderky, kde používají jiné značení; do prezentace jsem důkaz dal jen k ukázání, že nejde o nic komplikovaného)

Dekonvoluce

Fourierova transformace nám ale umožní taky počítat *inverzní* transformaci ke konvoluci.

$$\hat{f} = (\widehat{f * g})/\hat{g}$$

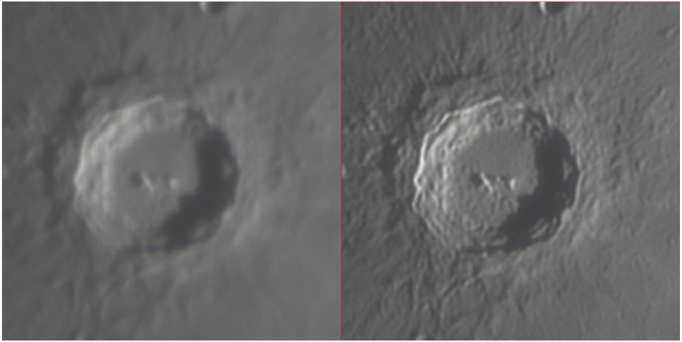
Dekonvoluce

Fourierova transformace nám ale umožní taky počítat *inverzní* transformaci ke konvoluci.

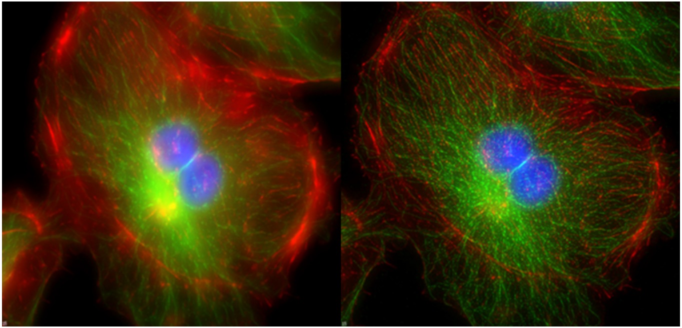
$$\hat{f} = (\widehat{f * g})/\hat{g}$$

(samozřejmě za určitých podmínek na f a g)

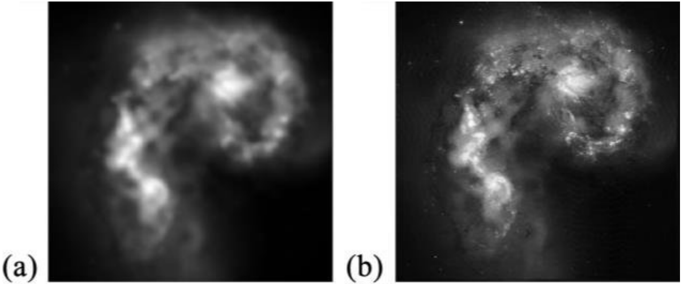
Dekonvoluce



Dekonvoluce



Dekonvoluce



Dekonvoluce

Dekonvoluce

Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

K čemu je dobrá?

- Zpracování signálů,
- zpracování obrazu,
- rychlé násobení polynomů,
- … mnoho dalších aplikací …

Shrnutí

Co je Fourierova transformace?

- Operace (resp. třída operací) na funkcích, která, zhruba řečeno, popisuje *frekvence* přítomné ve funkci.

K čemu je dobrá?

- Zpracování signálů,
- zpracování obrazu,
- rychlé násobení polynomů,
- ... mnoho dalších aplikací ...

Jak se počítá?

- Pomocí algoritmu **FFT** (Fast Fourier transform).

Reklama: kde se dozvědět víc

O teorii:

- NMMA331: Úvod do funkcionální analýzy
- HARD MODE: NMAG533: Principy harmonické analýzy

Reklama: kde se dozvědět víc

O aplikacích:

- NPGR002: Digitální zpracování obrazu
- NPFL133: Číslicové zpracování zvukových signálů

Díky za pozornost.