Definice 1. *Standardní skalární součin nad* $\mathbb{C}$

- V prostoru $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i} = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2} + \cdots + x_n \cdot \overline{y_n}$,
- V prostoru funkcí $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$: $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$.

Skalární součin pak indukuje

- normu: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$,
- úhel mezi u a v: $\cos^{-1}(\frac{\mathrm{Re}\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|})$.
- Takže vektory u a v jsou *ortogonální* právě tehdy když $\langle u, v\rangle = 0$.

Odteď zafixujme primitivní n-tou odmocninu jedničky, $\omega := e^{\frac{-2\pi i}{n}}$.

Věta 2. Množina vektorů

$$\{b_k\}_{k=0}^{n-1} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega^{jk}\right)_{j=0}^{n-1} \right\}_{k=0}^{n-1}$$
$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}, \ldots, \omega^{(n-1)k}\right)^T \right\}_{k=0}^{n-1}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ (zde s indexací od 0 do $n-1$).

Důkaz:

$$\langle b_k, b_{k'}\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{jk} \; \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{\omega^{jk'}} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(k-k')} = \begin{cases} 1 & \text{když } k = k' \\ 0 & \text{jinak (geom. řada).} \end{cases}$$

Přitom množina (po dvou) ortogonálních vektorů je nutně lnz. ■

Definice 3. *Diskrétní Fourierova transformace* vektoru $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})^T$ je vektor $(X_0, \ldots, X_{n-1})^T$ souřadnic x vůči bázi $\{b_k\}$:

$$F(x)_t = \hat{x}_t = X_t = \langle x, b_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot \overline{\omega^{jt}} \qquad (\overline{\omega^{jt}} = \omega^{-jt}).$$

Inverzní operaci pak dostaneme jednoduše dosazením souřadnic:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \cdot b_k, \quad \text{neboli } x_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} X_j \cdot \omega^{jt}.$$

Poznámka: Často se DFT definuje bez normalizace (faktoru $\frac{1}{\sqrt{n}}$) a bez komplexního sdružení jako

$$X_t = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cdot \omega^{jt}.$$

Pak se inverzní operace změní na $x_t = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} X_j \omega^{-jt}$.

(DFT i její inverz můžeme počítat algoritmem FFT)

Algoritmus 4. Fast Fourier Transform (FFT):

Vstup: $N = 2^k$, vektor $(x_0, \ldots, x_{N-1})$,
navíc $\omega = e^{\frac{i2\pi}{N}}$.

- Pokud $N = 1$, vrátíme $X_0 = x_0$.
- Jinak se rekurzivně zavoláme na sudé a liché indexy zvlášť:
  - $(s_0, \ldots, s_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_0, x_2, \ldots, x_{N-2}), \omega^2)$.
  - $(\ell_0, \ldots, \ell_{N/2-1}) \leftarrow FFT(N/2, (x_1, x_3, \ldots, x_{N-1}), \omega^2)$.
- Poskládáme výsledné DFT: iterujeme $j = 0, \ldots, N/2 - 1$:
  - $X_j \leftarrow s_j + \omega^j \cdot \ell_j$
  - $X_{j+N/2} \leftarrow s_j - \omega^j \cdot \ell_j$

Definice 5. Konvoluce:

$$(a * b)_t = \sum_j a_j b_{t-j(\mathrm{mod}\, n)} = \sum_j a_{t-j(\mathrm{mod}\, n)} b_j.$$

Vektory a i b mohou být vícedimenzionální v tom smyslu, že indexy t a j jsou také vektory. Pro jednoduchost ale můžete t i j brát jen jako obyčejné indexy.

Věta 6. „*FT mění konvoluci na násobení*“

$$\widehat{a * b} = \hat{a} \cdot \hat{b}, \quad \text{neboli}$$
$$F(a * b) = F(a) \cdot F(b).$$

(v prezentaci najdete i důkaz)

FFT je tedy algoritmus, díky kterému můžeme DFT, ale i (diskrétní) konvoluci, počítat pomocí $\mathcal{O}(n \log n)$ aritmetických operací.

Věta 7. *(Násobení polynomů je konvoluce vektorů)* Mějme dva polynomy stupně (maximálně) d,

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d,$$
$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_d x^d.$$

Uvažme jejich koeficienty jako $(2d+1)$-prvkové vektory

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, \ldots 0)\,,$$
$$b = (b_0, b_1, \ldots, b_d, 0, \ldots 0)\,.$$

Pak koeficienty jejich součinu

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{2d} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

přesně odpovídají konvoluci vektorů $a * b$.