Cvičení 5

Úloha 1. *Jednotkový Dinic.*
Dokažte, že pro síť s (pouze) jednotkovými kapacitami Dinicův algoritmus běží v čase $\mathcal{O}(mn)$.
Dokažte totéž pro celočíselné kapacity omezené konstantou.

Úloha 2. *Odhad $\mathcal{O}(n^2m)$ je těsný.*
- Sestrojte síť, na níž Dinicův algoritmus provede $\Omega(n)$ fází.
- Sestrojte vrstevnatou síť, v níž hledání blokujícího toku trvá $\Omega(nm)$ *(pozor, tohle potřebujeme umět i pro případ, kdy $m \in \omega(n)$).*

* Zkombinujte obě sítě a vytvořte síť, na níž Dinicův algoritmus běží v čase $\Omega(n^2m)$.

Úloha 3. *Cirkulace* se říká toku, v němž platí Kirchhoffův zákon v úplně všech vrcholech (je to tedy tok nulové velikosti). V dané síti najděte cirkulaci, která maximalizuje tok určenou hranou.

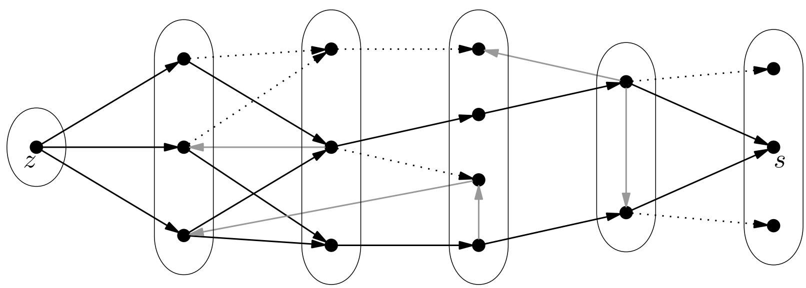
Úloha 4. *Bipartitní vrcholové pokrytí.*
Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu je množina vrcholů, která „*pokrývá*" všechny hrany, tedy každá hrana sousedí alespoň s jedním vrcholem této množiny.
Navrhněte algoritmus pro nalezení *nejmenšího vrcholového pokrytí* v bipartitním grafu.
Pro obecné grafy není znám algoritmus, který by běžel v čase omezeném jakýmkoli polynomem velikosti grafu (jde o NP-těžký problém.)

Úloha 5. (Průchod šachovnicí:)
Je dána šachovnice $n \times n$, kde některá políčka jsou nepřístupná. Celý dolní řádek je obsazen figurkami, které se mohou hýbat o jedno pole dopředu, šikmo vlevo dopředu, či šikmo vpravo dopředu. V jednom tahu se všechny figurky naráz pohnou (mohou i zůstat stát na místě), na jednom políčku se však musí vyskytovat nejvýše jedna figurka. Ocitne-li se figurka na některém políčku horního řádku šachovnice, zmizí.
Navrhněte algoritmus, který najde minimální počet tahů takový, že z šachovnice dokážeme odstranit všechny figurky, případně oznámí, že řešení neexistuje.

*** Úloha 6.** *Algoritmus tří Indů:*
Blokující tok ve vrstevnaté síti lze nalézt chytřejším způsobem v čase $\mathcal{O}(n^2)$, čímž zrychlíme celý Dinicův algoritmus na $\mathcal{O}(n^3)$. Následuje stručný popis, doplňte k němu detaily.

Pro každý vrchol v definujme $r^+(v)$ jako součet rezerv na všech hranách vedoucích do v. Nechť dále $r^-(v)$ je totéž přes hrany vedoucí z v a $r(v) = \min(r^+(v), r^-(v))$ „rezerva vrcholu“. Pokud je $r(v)$ všude 0, tok už je blokující.

V opačném případě opakovaně vybíráme nejmenší $r(v)$ a snažíme se ho vynulovat. Potřebujeme tedy dopravit $r(v)$ jednotek toku ze zdroje do v a totéž množství z v do stoku. Popišme dopravu do stoku (ze zdroje postupujeme symetricky): ve vrcholech udržujeme plán $p(w)$, který říká, kolik potřebujeme z w dopravit do stoku. Na začátku je $p(v) = r(v)$ a všechna ostatní $p(w) = 0$. Procházíme po vrstvách od v ke stoku a pokaždé plán převedeme po hranách s kladnou rezervou do vrcholů v další vrstvě. Jelikož $r(v) \leq r(w)$ pro všechna w, vždy nám to vyjde. Průběžně čistíme slepé uličky.



Síť rozdělená na vrstvy. Šedivé hrany (které vedou uvnitř jedné vrstvy nebo do minulých vrstev) a tečkované hrany (slepé uličky) během čištění sítě zmizí, plné zůstanou. *Obrázek je převzatý z Průvodce.*