

Cvičení 8

Úloha 1. *Fourierovy obrazy:*

Spočítejte Fourierovy obrazy následujících vektorů:

- (x, x, \dots, x) pro $x \in \mathbb{R}$ (zkuste nejdříve $x = 1$)
- $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$
- $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$
- $(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$
- $(\omega^0, \omega^2, \omega^4, \dots, \omega^{2n-2})$

Úloha 2. O jakých vlastnostech vektoru vypovídá nultý a $(n/2)$ -tý koeficient Fourierova obrazu?

Úloha 3. *Obraz kanonické báze:*

Jak vypadá Fourierův obraz jednotkového vektoru e_i , tedy vektoru který má na i -té pozici jedničku a všude jinde 0?

Úloha 4. *Inverz kanonické báze:*

Pro každé i najděte vektor, jehož Fourierovým obrazem je e_i . Jak z toho sestrojíte inverzní Fourierův obraz?

Úloha 5. *DFT reálného vektoru:*

Ukažte, že Fourierův obraz \mathbf{y} reálného vektoru \mathbf{x} je *antisymetrický*, tedy $y_j = \overline{y_{n-j}}$ pro všechny indexy j .

Jaký pak bude Fourierův obraz antisymetrického vektoru?

Úloha 6. *Odmocniny z jedničky a volba ω :*

Kolik existuje n -tých odmocnin jedničky a jak vypadají? Proč jiná čísla nejsou n -tou odmocninou z jedničky? Které z n -tých odmocnin jedničky jsou primitivní?

Ve Fourierově transformaci máme volnost v tom, jakou primitivní odmocninu ω si vybereme. Ukažte, že Fourierovy obrazy pro různé volby ω se liší pouze pořadím složek.

Úloha 7. *Bonus pro milovníky komplexních čísel:*

Spočítejte druhou mocninu polynomu $x^3 - x^2 - 2x + 2$ pomocí DFT, tedy $(x^3 - x^2 - 2x + 2)^2$.