Cvičení 10

Úloha 1. Sestrojte hradlovou síť hloubky $\mathcal{O}(\log n)$, která *porovná* dvě n-bitová čísla x a y a vydá jedničku, pokud $x < y$.

Úloha 2. Dokažte, že každou booleovskou formuli lze přeložit na booleovský obvod jehož hloubka je logaritmická v délce formule.

Úloha 3. Jak by vypadaly komparátorové sítě pro *bublinkové třídění* a *třídění vkládáním*? Jak se bude lišit průběh jejich výpočtu?

Úloha 4. Navrhněte komparátorovou síť pro *hledání maxima:* dostane-li n prvků, vydá takovou permutaci, v níž bude poslední hodnota největší.

Úloha 5. Dokažte *nula-jedničkový princip:* pro ověření, že komparátorová síť třídí všechny vstupy, ji postačí otestovat na všech posloupnostech nul a jedniček.

Úloha 6. *Dva ploty.*
Všimněme si, že pokud bychom netrvali na tom, aby bylo našich n jabloní oploceno jediným plotem, mohli bychom ušetřit pletivo. Sestrojte dva uzavřené ploty tak, aby každá jabloň byla oplocena a celkově jste spotřebovali nejméně pletiva.

Úloha 7. Ukažte, jak komparátorovou síť přeložit na booleovský obvod. Každý prvek abecedy Σ reprezentujte číslem o $b = \lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bitech a chceme komparátory o $\mathcal{O}(\log b)$ hladinách.

Úloha 8. *Batcherovo třídění.*
Paralelního třídění v čase $\Theta(\log^2 n)$ lze také dosáhnout následujícím rekurzivním algoritmem pro slévání setříděných posloupností:

Vstup: Setříděné posloupnosti $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ a $(y_0, \ldots, y_{n-1})$

1. Je-li $n \leq 1$, vyřešíme triviálně.
2. $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \textsc{BMerge}((x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}), (y_0, y_2, \ldots, y_{n-2}))$
3. $(b_0, \ldots, b_{n-1}) = \textsc{BMerge}((x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}), (y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}))$

Výstup $(a_0, \min(a_1, b_0), \max(a_1, b_0), \min(a_2, b_1), \max(a_2, b_1), \ldots, b_{n-1})$

Pomocí *nula-jedničkového* principu (z páté úlohy) dokažte, že tato procedura funguje. Zapište tento algoritmus ve formě třídicí sítě.