Domácí úkol 4

Za každou úlohu je možné získat až 6 bodů.

Úloha A: *Sběratelské kartičky.*

Z přednášky známe algoritmy na nalezení maximálního toku v síti. Existují také algoritmy, které umožní každé hraně e kromě kapacity $c(e)$ přiřadit také cenu (price) $p(e)$, a najdou takový tok f, který je maximální a naráz mezi maximálními toky minimalizuje cenu. Celková cena toku f je definovaná jako

$$p(f) = \sum_{e \in E} f(e) \cdot p(e).$$

Tomuto algoritmickému problému se *říká maximální tok minimální ceny* (*minimum-cost maximum flow*). Pro následující úlohu můžete algoritmus pro tento problém použít jako podproceduru (neočekávám tak analýzu časové složitosti, jen využití blackboxu).

K samotné úloze: Mečislav se snaží získat všech n sběratelských kartiček vydaných svou oblíbenou sportovní organizací. Kartičkám můžeme říkat $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Mečislav kartiček už sice má n, ale některé má víckrát, a chtěl by mít od každé jednu.

Kartičky už nejdou koupit přímo, ale dají se směňovat. Jistá webová stránka zveřejňuje seznam, kde se píše, kterou kartičku lze směnit za jakou jinou. Směňovat lze víckrát a za každou výměnu karty za jinou si stránka účtuje poplatek jeden zlaťák.

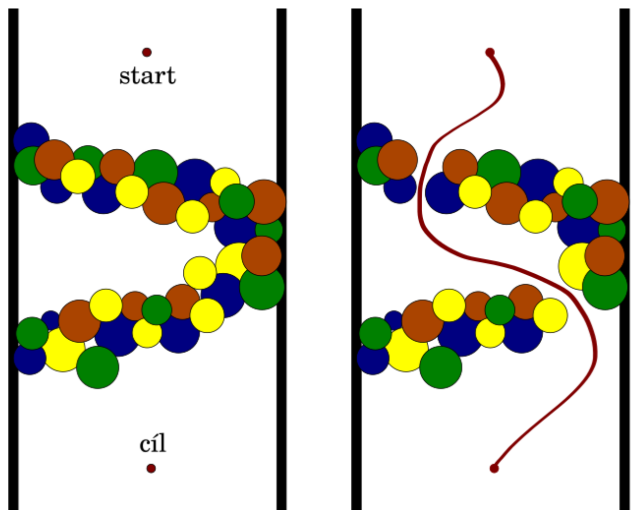
Navrhněte algoritmus, který navrhne, jak kartičky směňovat, aby měl Mečislav nakonec každou z n karet právě jednou, a zaplatil přitom co nejmíň zlaťáků (nebo vypíše, že to nejde).

Příklad: Představme si, že $n = 3$ a Mečislav má tři karty k_1 a žádnou jinou. Webovka říká, že k_1 lze vyměnit za k_2 a k_2 lze vyměnit za k_3, ale jiné směny nejsou možné. Pak je potřeba dvě karty k_1 vyměnit za dvě k_2, a jednu takto získanou k_2 ještě vyměnit za k_3. Tímto postupem zaplatíme tři zlaťáky.

Úloha B: Představme si dvě nekonečně vysoké „stěny“ ve 2D. Jednu s x-ovou souřadnicí 0. Druhou s x-ovou souřadnicí 10. Mezi zdmi je několik kruhů, každý je zadán souřadnicemi svého středu a svým poloměrem.

Někde nad kruhy je startovní bod, a někde pod kruhy je bod cílový. Navrhněte algoritmus který vrátí co nejmenší počet kruhů, po jejichž odstranění lze ze startu do cíle nakreslit křivku, která neprotíná žádný kruh.

Například uvažme následující obrázek. Vlevo vidíme zadanou situaci a vpravo určitou volbu kruhů, po jejichž odstranění dokážeme start a cíl spojit křivkou.



Opět můžete použít toky jako blackbox. Jde hlavně o formulaci postupu. Numerické problémy a podobné věci ignorujme.