Cvičení 4

Orientované grafy

Úloha 1: Pomocí topologické indukce najděte nejkratší cestu mezi dvěma zadanými vrcholy v acyklickém grafu, když je dáno *ohodnocení hran* udávající jejich délku. Co když chceme spočítát *počet* takových nejkratších cest.

Úloha 2: Jak poznat grafy, které lze topologicky uspořádat právě jedním způsobem?

* **Úloha 3:** Mějme orientovaný graf, v němž jsou některé vrcholy vyznačené. Jak poznat, jestli nějaký vyznačený vrchol leží na cyklu?

* **Úloha 4:** O orientovaném grafu řekneme, že je *polosouvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy vede orientovaná cesta alespoň jedním směrem. Navrhněte lineární algoritmus, který polosouvislost grafu rozpozná.

* **Úloha 5:** Buď zadán orientovaný graf, který není silně souvislý. Jak přidat co nejméně hran tak, aby se silně souvislým stal?

Dijkstra

Úloha 6: Ukažte, že když povolíme záporné hrany, Dijkstrův algoritmus se rozbije. I pokud zakážeme záporné cykly:

(a) Když naše implementace vstoupí do každého vrcholu nevýše jednou, najděte graf, kde nevydá nejkratší cestu.

(b) Dovolme proto opětovné otevírání vrcholů. Najděte konstrukci takového grafu na n vrcholech (pro každé n), na kterém Dijkstra hledáním nejkratší cesty stráví $2^{\Omega(n)}$ kroků.

* **Úloha 7:** Mějme mapu města v podobě orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme maximální výškou kamionu, který může projet po příslušné ulici. Po cestě tak projede maximálně tak vysoký kamion, jaké je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro dva zadané body najít cestu, po níž projede co nejvyšší kamion?

* **Úloha 8:** Chceme si napsat vyhledávač spojů MHD. Máme k dispozici časy odjezdů a příjezdů všech městských linek na zastávky a naše aplikace by měla umět říct, jak se z libovolné zastávky dostat do libovolné jiné, když se na ní ocitneme v zadaný čas. Co když místo času odjezdu chceme zadávat čas příjezdu?