Cvičení 10

Úloha 1. Řešte rekurence:

1. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$
2. $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + n + 42$
3. $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{2}) + 42 \cdot n + 1$
4. $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$
5. $T(n) = 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$
6. $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$
7. $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^3)$
8. $T(n) = T(\frac{n}{7}) + T(\frac{5}{7}n) + n$

Úloha 2. Vyřešte rekurenci $T(n) = c \cdot T(\frac{n}{2}) + \Theta(n \log n),\ T(1) = 1$.
Nejprve můžete vyřešit pro $c = 1, 2$, a pak se teprve zabývat obecným případem.

Úloha 3. Vyřešte rekurenci $T(1) = 1,\ T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$.

Úloha 4. V analýze Karacubova algoritmu na přednášce nezazněl jeden detail: čísla $A + B$ a $C + D$ mohou mít víc než $n/2$ cifer. Ukažte, že to asymptotickou složitost nezmění.

Úloha 5. Problému z předchozího cvičení se taky dá vyhnout jednoduchou úpravou algoritmu: místo $(A + B)(C + D)$ spočtěme $(A - B)(C - D)$. Jak přesně pak algoritmus vypadá?

Úloha 6. *Převod mezi soustavami:* Máme n-ciferné číslo v soustavě o základu z a chceme ho převést do soustavy o jiném základu. Ukažte, jak to metodou Rozděl a panuj zvládnout v čase $\mathcal{O}(M(n))$, kde $M(n)$ je čas potřebný na násobení n-ciferných čísel v soustavě o novém základu.

Úloha 7. Vícecestný Mergesort s k „cestami“ dělí posloupnost na k stejně velkých částí, které rekurzivně setřídí a výsledky slije.
Nejprve ukažte, jak slévat k setříděných polí celkové délky n v čase $\mathcal{O}(n \log k)$.
Pak analyzujte časovou složitost vícecestného Mergesortu. Může takový algoritmus být rychlejší než standardní Mergesort?
Čemu odpovída n-cestný Mergesort?

Kuchařka na řešení rekurencí (*Master theorem*):

Rekurentní rovnice $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ má řešení

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta(n^c \log n), && \text{pokud } a/b^c = 1 \\
T(n) &= \Theta(n^c), && \text{pokud } a/b^c < 1 \\
T(n) &= \Theta(n^{\log_b a}), && \text{pokud } a/b^c > 1
\end{aligned}
$$

(pro konstanty $a \geq 1,\ b > 1,\ c \geq 0$)