Cvičení 1

Cíle cvičení:

- zopakovat počítání znaménka permutace,
- procvičit výpočet determinantu matice.

Úloha 1. Nechť $p = (135)(4798)(26)$ a $q = (18)(247693)$ jsou dvě permutace z S_9. Najděte permutace $p \circ q$, $q \circ p$, p^{-1}, q^{-1}.

Úloha 2. Určete znaménka permutací $p = (17)(36)(2458), p^{-1}$, $q = (245)(3687)$, $r = (13)(2675)$, $p \circ q \circ r$, $q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q$.

Úloha 3. Napište permutace $p = (13475)$ a $q = (19)(267)(3548)$ z S_9 jako složení transpozic.

Úloha 4. Spočítejte determinanty následujících matic:

(a) nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

(c) nad $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & i+3 \\ i-3 & 2+i \end{pmatrix}$$

(d) nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Úloha 6. Zjednodušte výraz $\det(SAS^{-1})$ pro matice $A, S \in \mathbb{T}^{n \times n}$.

Úloha 7. Rozhodněte, pro která reálná a jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix},\ Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P(a) \cdot Q(a),\ P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$$

Definice determinantu čtvercové matice řádu n je

$$|A| = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p_i}.$$

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

Důsledek: Přičtením skalárního násobku řádku (sloupce) k jinému se determinant nezmění.
(takže determinant můžeme najít převedením matice elementárními řádkovými ***a sloupcovými*** *úpravami na trojúhelníkovou a pak jen vynásobit diagonální prvky)*

Věta: Matice je singulární právě když má nulový determinant.

Věta: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.