Cvičení 2

Úloha 1. Spočítejte nad $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ determinanty matic

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Úloha 2. Spočítejte determinanty pomocí elementárních úprav.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{nad } \mathbb{Z}_5, \qquad \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i+1 \end{pmatrix} \text{nad } \mathbb{C}$$

Úloha 3. Mějme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ a vektor $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Určete adjungovanou matici $\operatorname{adj} A$.
(b) Určete A^{-1}.
(c) Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = b$.
(d) Určete obsah trojúhelníku v $\mathbb{R}^2$, jehož vrcholy jsou $(0,0)^T, (2,4)^T, (5,1)^T$.

Úloha 4. S pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

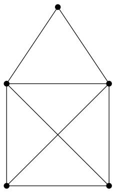
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array}\right)$$

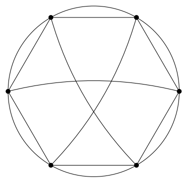
Úloha 5. Aniž byste počítali celou inverzní matici, určete prvek na pozici $(4,1)$ matice A^{-1} pro

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 6. Určete počet koster následujících (multi)grafů:

(a) 

(b) 

Úloha 7. Dokažte, že pokud A je horní (dolní) trojúhelníková matice, pak i $\operatorname{adj} A$ je horní (dolní) trojúhelníková.

(A^{ij} značí podmatici A, kterou získáme odstraněním $i$tého řádku a $j$tého sloupce)
Definice adjungované matice je

$$(\operatorname{adj} A)_{ji} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}.$$

Věta: Pro regulární $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ platí $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

($A_{i\to b}$ získáme z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b)
Cramerovo pravidlo: Nechť $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je regulární. Řešení soustavy $Ax = b$ nutně splňuje $x_i = \frac{1}{\det A} \det A_{i\to b}$.

Laplaceova matice (multi)grafu G je definovaná

$$(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \text{ (deg zahrnuje násobnosti, ale ne smyčky)} \\ -|v_iv_j| & \text{pro } i \neq j\text{, tj. násobnost hrany } v_iv_j\text{, pokud } v_iv_j \in G \\ 0 & \text{jinak (G neobsahuje příslušnou hranu).} \end{cases}$$

Věta: Každý G (na alespoň dvou vrcholech) má $\det(L_G^{11})$ koster.