Cvičení 3

Úloha 1. Vlastní vektor x lineárního zobrazení f reprezentuje směr, který se při aplikaci $f(x) = Ax$ zobrazí na stejný směr (změní se jen velikost a/nebo orientace vektoru x). Pro *vlastní vektor* v matice A tedy platí, že přímka $\text{span}\{v\}$ se při zobrazení f zobrazí do sebe sama. Příslušné *vlastní číslo* λ matice A pak představuje škálování v tomto invariantním směru, tj. $Ax = \lambda x$.
Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a zkuste je geometricky vysvětlit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Určete součet, rozdíl, součin a podíl následujících polynomů p a q.

(a) $p(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $q(x) = 3x^2 - 1x + 5$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 2$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Úloha 3. V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom stupně nejvýše $p - 1$, který nabývá stejných hodnot pro $x \in \mathbb{Z}_p$.

(a) V tělese $\mathbb{Z}_5$, $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.

(b) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

Úloha 4. Proložte kvadratický polynom (parabolu) body

(a) $(-1, -9)$, $(1, -3)$ a $(2, 3)$,

(b) $(-1, 10)$, $(1, 4)$ a $(4, 25)$.

Vyzkoušejte si na tom jak interpolaci pomocí Vandermondovy matice, tak Lagrangeovu interpolaci.

Úloha 5. Vyjádřete $\det(\operatorname{adj}(A))$ pomocí $\det(A)$.

Interpolace polynomem řeší následující problém: dostaneme $(n+1)$ dvojic (x_i, y_i) a chceme najít polynom p stupně nejvýše n takový, že $p(x_i) = y_i$ pro každé i.
Koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ polynomu p dostaneme jako řešení soustavy $Va = y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Příslušná „*Vandermondova matice*“ V je vždy regulární (pokud $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$).

Lagrangeova interpolace na to jde jinak: Definujeme $n+1$ pomocných polynomů

$$p_i(x) := \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Tyto polynomy jsou definované tak, aby platilo $p_i(x_i) = 1$ a $p_i(x_j) = 0$ pro $j \neq i$. Díky tomu hledaný polynom p už vyjádříme jednoduše jako

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x).$$