Cvičení 4

Úloha 1. Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ najděte všechna vlastní čísla, jejich algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory.

Úloha 3. Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a jim odpovídající vlastní vektory $x_1, \ldots, x_n$. Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory

(a) matice A^2,

(b) matice αA,

(c) matice $A + \alpha I_n$,

(d) matice A^T.

Úloha 4. Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -4$ a $\lambda_3 = 5$. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Úloha 5. Nechť f je lineární zobrazení na podprostoru $\operatorname{span}\{(1,0,1)^T, (2,-1,0)^T\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro které platí

$$f\left((1,0,1)^T\right) = (9,-4,1)^T \quad \text{a} \quad f\left((2,-1,0)^T\right) = (-3,2,1)^T.$$

Spočítejte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory zobrazení f.

Úloha 6. Pro každé prvočíslo p nalezněte matici typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_p$, která nebude mít *žádné* vlastní číslo (v $\mathbb{Z}_p$).