

Cvičení 5

Úloha 1. Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Úloha 2. Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Úloha 3. Rozhodněte o platnosti „ $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$.“
Jak to je s opačnou implikací?

Úloha 4. Rozložte následující matice na součin SDS^{-1} , kde S je regulární a D diagonální.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Úloha 5. Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Ověřte pro ni Cayleyho-Hamiltonovu větu.
- Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A .
- Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A .

Úloha 6. Dokažte Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Úloha 7. Je-li φ lineární zobrazení na vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 s maticí

$${}_{kan}[\varphi]_{kan} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ověřte, že φ je bijekce a rozhodněte, zda jsou zobrazení φ a φ^{-1} diagonalizovatelná.

Věta (Cayley-Hamilton): „Matice je kořenem svého charakteristického polynomu,“ tj.

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I_n = 0_{n \times n}.$$

Definice: Matice A a B jsou (si) podobné, píšeme $A \sim B$, pokud existuje regulární matice S , tž.

$$A = SBS^{-1} \quad (\text{a tedy } B = S^{-1}AS).$$

Pozor: $A \sim B$ jsme taky psali, když B šlo získat z A jednou elementární úpravou. $A \sim\sim B$ pak značilo, že posloupnost elementárních úprav převede A na B . Jde samozřejmě o jiné vlastnosti než podobnost.

Pozorování (podobnost a vlastní vektory):

Pokud $B = SAS^{-1}$ a $Ax = \lambda x$, pak $B(Sx) = \lambda(Sx)$. Shodnost vlastních čísel podobných matic také plyne z toho, že podobné matice mají shodný charakteristický polynom. Vlastní čísla tak budou stejná se stejnou algebraickou i geometrickou násobností.

Definice: Matice A řádu n je diagonalizovatelná, pokud je podobná diagonální matici. Je to právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.