Cvičení 6

Úloha 1. Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$. Může pomoct nejprve najít matici 3×3 s libovolným (ale jediným) jedním vlastním vektorem.

Úloha 2. V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Úloha 3. Pro následující (symetrickou) matici A najděte spektrální rozklad tvaru $Q\Lambda Q^T$ (kde Λ je diagonální matice).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 4. Najděte reálnou ortogonální (takovou, že $U^T U = I_n$) matici U, pro níž je $U^T AU$ diagonální, jestliže

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Úloha 5. Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Úloha 6. Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 7. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ určené maticí

$$_{kan}[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Najděte bázi B, vůči které bude matice f v Jordanově tvaru,

(b) spočítejte $_B[f^{45}]_B$,

(c) položíme-li $A = \frac{1}{3}\,_{kan}[f]_{kan}$, spočítejte mocninu A^{45}.