Cvičení 8

Úloha 1. Rozhodněte, zda jsou následující matice ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Ukažte, že spektrální rozklad $Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Úloha 3. Buďte $M, N \subseteq V$ podmnožiny vektorového prostoru V.
Ukažte, že $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Úloha 4. Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Úloha 5. Určete vzdálenost bodu $a = (5,5,3,3)^T$ od roviny ρ procházející počátkem a body $b = (0,1,-1,0)^T$ a $c = (4,-2,2,-1)^T$.

Úloha 6. Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definice: Hermitovská matice A řádu n je *pozitivně definitní*, pokud pro ni platí $\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : \; v^H A v > 0$.

To nastane právě když má jen kladná vlastní čísla. Další ekvivalentní definice je, že existuje regulární U tž. $A = U^H U$.

Tvrzení: *(Choleského rozklad)*
Pro každou pozitivně definitní matici A existuje *jednoznačná* horní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou taková, že $A = U^H U$.