Cvičení 9

Úloha 1. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou pozitivně definitní.

(a) Ukažtě, že $A + B$ je také pozitivně definitní.
(b) Jak to bude se součtem pozitivně *semi*definitních matic?
(c) Jak to bude se součtem pozitivně semidefinitní a pozitivně definitní matice?
(d) Jak to bude s násobkem pozitivně (semi)definitní matice αA?

Úloha 2 *(z minule)*. Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3. Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně (semi)definitní matice je pozitivně (semi)definitní.

Úloha 4. Najděte regulární matici, která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.

Úloha 5. Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

S pomocí rozkladu pak najděte A^{-1}.

Úloha 6. Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Definice: Hermitovská matice A řádu n je *pozitivně definitní*, pokud pro ni platí $\forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : \; v^H A v > 0$. Řekneme, že je pozitivně *semidefinitní*, když pro každé $v \in \mathbb{C}^n$ platí $v^H A v \geq 0$.

Tvrzení: Hermitovská matice je pozitivně definitní právě tehdy, když má jen kladná vlastní čísla (a je pozitivně semidefinitní, právě když má nezáporná vlastní čísla). Další ekvivalentní definice je, že existuje regulární U tž. $A = U^H U$ (je pozitivně semidefinitní, právě když existuje libovolné takové U, ne nutně regulární).

Tvrzení: *(Choleského rozklad)*
Pro každou pozitivně definitní matici A existuje *jednoznačná* horní trojúhelníková matice U s kladnou diagonálou taková, že $A = U^H U$.

(Pro pozitivně semidefinitní matici existuje Choleského rozklad s nezápornou diagonálou, ale už nebude jednoznačný.)