

Cvičení 10

Úloha 1. Pomocí Gaussovy eliminace a determinantů hlavních vedoucích podmatic rozhodněte, zda jsou následující matice pozitivně definitní.

Najděte Choleského rozklad těch, které jsou.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2. Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3. Uvažme relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou v relaci tehdy, když existuje regulární S , tž. $B = S^T A S$.

- Dokažte, že jde o relaci ekvivalence.
- Kolik má tříd ekvivalence?

Úloha 4. Necht'

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

je matice bilineární formy na prostoru \mathbb{T}^3 . Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu (vše vůči stejné bázi).

Řešte pro $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ (v \mathbb{Z}_2 číslo 2 odpovídá 0).

Úloha 5. V závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$ určete signatury forem s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & b & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Věta (rekurentní podmínka pro PD): Blokovaná matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & b^H \\ b & B \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní, právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a $(B - \frac{1}{a_{11}}bb^H)$ je pozitivně definitní.

Důsledek: Pozitivní definitnost můžeme testovat Gaussovou eliminací, při které neměníme pořadí řádků a nenásobíme řádky skalárem (má-li výsledná trojúhelníková matice kladnou diagonálu, původní matice je PD, má-li nezápornou diagonálu, je PSD).

Věta (Sylvestrova podmínka): Hermitovská matice A řádu n je PD, právě když její hlavní vedoucí matice A_1, \dots, A_n mají kladné determinanty (čtvercová matice A_i vznikne z A odstraněním posledních $n - i$ řádků a sloupců).

Věta (Matice kvadratické formy při změně báze): Buď $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ matice kvadratické formy f vzhledem k bázi B prostoru V . Buď $S = {}_B[id]_{B'}$ matice přechodu od jiné báze B' . Pak matice f vzhledem k B' je $S^T A S$ (a odpovídá stejné symetrické bilineární formě).

Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti): Každá kvadratická forma na (konečně generovaném) reálném vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici jen s hodnotami $-1, 0, 1$.

Všechny takové matice shodné formy mají stejný počet jedniček a minus jedniček. Proto můžeme definovat *signaturu* formy jako trojici $(\#1, \#-1, \#0)$, počet jedniček, minus jedniček a nul libovolné takové diagonalizace.