Bonusové cvičení 9.5

Úloha 1. Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,

(b) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x, y) = x_1 y_2 + x_2$,

(c) $c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2 y_1$,

(d) $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$,

(e) $e : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A, B) = AB$.

Úloha 2. Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1 x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x, y)$ v maticové reprezentaci.

Úloha 3. Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. takovou, vůči níž je matice formy diagonální.

Z následujících bodovaných úloh si můžete (až) dvě vybrat a odevzdat jejich řešení coby první bonusový domácí úkol (můžete si v Sově nechat opravit libovolné množství úloh tohoto cvičení, ale bonusové body dostanete jen za dvě nejvýše obodované).

Úloha 4. ***(3 body)*** Ukažte, že pro každou bilineární formu b platí

$$b(u, 0) = b(0, u) = 0.$$

Úloha 5. ***(6 bodů)*** Diagonalizujte kvadratickou formu s maticí

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & 0_n \end{pmatrix},$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má hodnost n.

Úloha 6. ***(8 bodů)*** Najděte g-ortogonální bázi B (tj. takovou, že pro $x, y \in B, x \neq y$ platí $g(x, y) = 0$) reálné symetrické bilineární formy g tak, aby B byla zároveň *ortonormální* vůči standardnímu skalárnímu součinu, přičemž

(a) ${}_{kan}[g]_{kan} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$,

(b) ${}_{kan}[g]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.