# Domácí úkol 10

**Úloha 1 (4 body)** Najděte symetrickou matici, která není pozitivně semidefinitní, ale všechny její hlavní vedoucí podmatice mají nezáporný determinant.

*(Matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ má $n$ hlavních vedoucích podmatic. Její $i$-tá hlavní vedoucí podmatice $A_i$ je její „horní levý roh řádu $i$“, tedy $A_i$ vznikne z $A$ odstraněním posledních $n-i$ rádků a sloupců.*

*Sylvestrova podmínka pozitivní definitnosti říká, že symetrická matice je pozitivně **definitní** právě když je kladný determinant každé její hlavní vedoucí podmatice. Úloha po Vás chce ukázat, že přímočaré zobecnění pro pozitivní semidefinitnost nefunguje.)*

**Úloha 2 (4+4 body).**

- Pomocí Gaussovy eliminace zjistěte, zda je $A$ pozitivně (semi)definitní.

  Pokud je, najděte její Choleského rozklad.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Pomocí determinantů hlavních vedoucích podmatic zjistěte, zda je $B$ pozitivně definitní (z první úlohy víme, že tak neumíme ověřit semidefinitnost $B$).

  Pokud je, najděte její Choleského rozklad.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Úloha 3 (4 bodů).** Označme výraz

$$V(a,b,c) = 11a^2 + 10b^2 + 13c^2 - 4ab - 6ac - 20bc.$$

Dokažte, že $V(a,b,c) \geq 0$ pro libovolná reálná čísla $a, b, c$.