

**Úloha 1.** Necht'  $p = (135)(4798)(26)$  a  $q = (18)(247693)$  jsou dvě permutace z  $S_9$ . Najděte permutace  $p \circ q$ ,  $q \circ p$ ,  $p^{-1}$ ,  $q^{-1}$ .

*Řešení:* Z definice dostaneme hodnoty (skládáme zprava doleva, tj.  $(p \circ q)(x) = p(q(x))$ )

$$p \circ q = (1495)(27)(368), \quad q \circ p = (129)(3587)(46).$$

Cyklická notace nám dává inverzní permutace zadarmo (když si permutaci nakreslíme jako orientovaný graf, inverzní permutace odpovídá obrácení šipek).

$$p^{-1} = (5941)(27)(863), \quad q^{-1} = (921)(7853)(46).$$

**Úloha 2.** Určete znaménka permutací  $p = (17)(36)(2458)$ ,  $p^{-1}$ ,  $q = (245)(3687)$ ,  $r = (13)(2675)$ ,  $p \circ q \circ r$ ,  $q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q$ .

*Řešení:* Nejprve spočítejme cykly sudé délky, abychom zjistili, že

$$\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn}((17)(36)(2458)) = (-1)^3 = -1,$$

$$\operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn}((245)(3687)) = (-1)^1 = -1,$$

$$\operatorname{sgn} r = \operatorname{sgn}((13)(2675)) = (-1)^2 = 1.$$

V předchozí úloze jsme si mohli všimnout, že inverzní permutace má stejně velké cykly jako permutace původní, proto  $\operatorname{sgn} p^{-1} = \operatorname{sgn} p = -1$ . Tvrzení z přednášky nám říká, že znaménko složení permutací se rovná součinu znamének (což taky dává další způsob odvození  $\operatorname{sgn} p^{-1} = \operatorname{sgn} p = -1$ , protože  $1 = \operatorname{sgn}(p \circ p^{-1}) = \operatorname{sgn} p \cdot \operatorname{sgn} p^{-1}$ ), proto

$$\operatorname{sgn}(p \circ q \circ r) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1,$$

$$\operatorname{sgn}(q^{-1} \circ r \circ p^{-1} \circ q) = \operatorname{sgn} r \cdot \operatorname{sgn} p = -1.$$

**Úloha 3.** Napište permutace  $p = (13475)$  a  $q = (19)(267)(3548)$  z  $S_9$  jako složení transpozic.

*Řešení:* Snadno nahlédneme, že

$$(13475) = (15) \circ (17) \circ (14) \circ (13) = (13) \circ (34) \circ (47) \circ (75).$$

Cyklický zápis přímo říká, že  $(19)(267)(3548) = (19) \circ (267) \circ (3548)$ . Úlohu tak vyřešíme pro každý cyklus zvlášť:

$$(19)(267)(3548) = (19) \circ (26) \circ (67) \circ (35) \circ (54) \circ (48).$$

**Úloha 4.** Spočítejte determinanty následujících matic:

(a) nad  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) nad  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{pmatrix} 2-i & i+3 \\ i-3 & 2+i \end{pmatrix}$$

(b) nad  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

(d) nad  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

*Řešení:* **a)** Z definice  $7 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = -14 + 5 = -9$ , **b)** podobně dostaneme  $-27$ ,

**c)**  $(2-i)(2+i) - (i+3)(i-3) = 5 + 10 = 15$ .

**d)** Můžeme vyřešit Gaussovou (i když to samozřejmě není nutné):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

V eliminaci jsme pouze přičítali násobky řádků k jiným, což nemění determinant. Determinant trojúhelníkové matice je pak roven součinu diagonálních prvků (uvažme definici determinantu, identita je jediná permutace, pro kterou v součinu nedostaneme nulový prvek pod diagonálou).

**Úloha 5.** Rozhodněte, zda platí  $\det(AB) = \det(BA)$ .

*Řešení:* Z přednášky víme, že  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ , takže tohle tvrzení platí z komutativity násobení (v libovolném tělese).

*(Idea důkazu, že  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ : pokud je jedna z matic singulární, vyjde nutně 0 a tvrzení platí triviálně. Jinak jsou obě matice regulární a můžeme je tak získat z  $I_n$  (s determinantem 1) elementárními řádkovými úpravami. Stačí tedy tohle tvrzení dokázat jen pro matice elementárních řádkových úprav, což není náročné.)*

**Úloha 6.** Zjednodušte výraz  $\det(SAS^{-1})$  pro matice  $A, S \in \mathbb{T}^{n \times n}$ .

*Řešení:* Podobně jako v minulé úloze,

$$\begin{aligned}\det(SAS^{-1}) &= \det(S) \cdot \det(S^{-1}) \cdot \det(A) = \det(SS^{-1}) \cdot \det(A) \\ &= \det(I_n) \cdot \det(A) = \det(A).\end{aligned}$$

**Úloha 7.** Rozhodněte, pro která reálná  $a$  jsou regulární reálné matice

$$P(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(a) \cdot Q(a), \quad P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$$

*Řešení:* Nejprve spočítáme determinanty pomocí Laplaceova rozvoje

$$\begin{aligned}\det(P(a)) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = a - a^2, \\ \det(Q(a)) &= \det \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2a.\end{aligned}$$

Víme, že matice je regulární právě když má nenulový determinant. Aplikací věty o determinantu součinu máme

$$\begin{aligned}\det(P(a) \cdot Q(a)) &= a(1-a)(1-2a), \\ \det(P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}) &= a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}.\end{aligned}$$

$P(a)$  je tudíž regulární pro všechna  $a$  kromě 0 a 1.  $Q(a)$  je regulární právě když  $a \neq \frac{1}{2}$  a součin  $P(a) \cdot Q(a)$  je regulární pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ . Polynom  $a^{257}(1-a)^{257}(1-2a)^{374}$  nemá jiné kořeny, než 0, 1 a  $\frac{1}{2}$ , takže i  $P(a)^{257} \cdot Q(a)^{374}$  je regulární právě pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ .