

Úloha 1. Spočítejte nad \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 determinanty matic

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Řešení: Determinanty šlo nejprve spočítat nad \mathbb{Q} a pak jen výsledky upravit modulo 5 a 7, abychom získali determinant v \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 . V podúloze (c) můžeme využít větu o součinu determinantů (obecně platí $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$).

Výsledky: **a)** Nad \mathbb{Q} dostaneme 5, takže 0 nad \mathbb{Z}_5 a 5 nad \mathbb{Z}_7 .

b) Vyjde -5 nad \mathbb{Q} , tedy 0 nad \mathbb{Z}_5 a 2 nad \mathbb{Z}_7 .

c) Determinant první matice součinu jsme spočítali v **b**čku (takže rovnou vidíme, že nad \mathbb{Z}_5 má součin nulový determinant), druhá matice má determinant 6, takže sečteno podtrženo determinant výsledné matice je nad \mathbb{Q} roven -30 , nad \mathbb{Z}_5 nula a nad \mathbb{Z}_7 je to 5.

d) Elementárními úpravy nám dají

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5,$$

a máme stejný výsledek jako v **a**čku.

Úloha 2. Spočítejte determinanty pomocí elementárních úprav.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5, \quad \begin{pmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i+1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{C}$$

Řešení: Výsledky jsou 1 a $-i$. Takhle se k nim dobereme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} i-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ -1 & 1 & i+1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -i-1 \\ 0 & 1 & i \\ i-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -i-1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i+1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -i-1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix} = -i
\end{aligned}$$

Úloha 3. Mějme reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ a vektor $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Určete adjungovanou matici $\text{adj } A$.
- Určete A^{-1} .
- Určete souřadnici x_2 řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = b$.
- Určete obsah trojúhelníku v \mathbb{R}^2 , jehož vrcholy jsou $(0, 0)^T$, $(2, 4)^T$, $(5, 1)^T$.

Řešení: **a)** Z definice máme

$$\text{adj } a = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

b) ze vztahu adjungované a inverzní matice dostaneme

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Podle Cramerova pravidla,

$$x_2 = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-18}{-2} = 9.$$

d) Jde o polovinu obsahu rovnoběžníku určeného hranami $(2, 4)$ a $(5, 1)$, tedy polovinu absolutní hodnoty determinantu, který jsme právě spočítali. Obsah trojúhelníku je $|-18|/2 = 9$.

Úloha 4. S pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a \end{array} \right)$$

Řešení: Cramerovo pravidlo můžeme použít jen když je A regulární, tedy pro $a \neq 2$. Determinant A je pak roven $a - 2$. Determinanty po nahrazení příslušných sloupců b -čkem pak jsou

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 3 - a,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = a^2 - 6.$$

Řešení soustavy má tedy tvar

$$(x_1, x_2)^T = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A} \right)^T = \left(\frac{3 - a}{a - 2}, \frac{a^2 - 6}{a - 2} \right)^T.$$

Co když $a = 2$? Pak máme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right),$$

která očividně nemá řešení.

Úloha 5. Aníž byste počítali celou inverzní matici, určete prvek na pozici $(4, 1)$ matice A^{-1} pro

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{R}, \quad (b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_5.$$

Víme, že kýžený prvek A^{-1} je roven $-\det A^{1,4} / \det A$.

a) Máme

$$-A^{1,4} = - \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Laplaceův rozvoj podle prvního řádku nám říká

$$\det A = -5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \det A^{1,4},$$

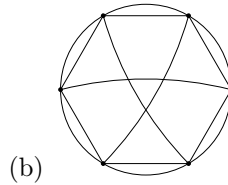
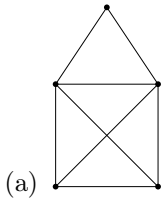
takže vyjde $\frac{1}{5}$.

Všimněme si, že jsme to mohli domyslet ze samotné definice maticového násobení. V součinu AA^{-1} musí na pozici $(1, 1)$ vyjít 1, a kvůli nulám na prvním řádku tuhle hodnotu dostaneme jako součinu pětky a hodnoty $(A^{-1})_{1,4}$.

b) Tady se počítání determinantů nevyhneme, vyjde

$$\frac{\det A^{1,4}}{\det A} = \frac{4}{1} = 4.$$

Úloha 6. Určete počet koster následujících (multi)grafů:



Řešení: **a)** Laplaceova matice grafu je

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potřebujeme proto spočítat

$$\begin{aligned} \det(L^{1,1}) &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 19 & -9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 19 & -9 \end{vmatrix} = -4(9 - 19) = 40. \end{aligned}$$

Můžeme se zamyslet, jaké všechny kostry graf má, a ověřit tak, že jsme získali správné číslo: K_4 má 16 koster a ke každé z nich jsou dvě možnosti, jak připojit horní vrchol (zprava, zleva) — celkem 32 možnosti. Jinak kostra obsahuje celou stříšku a v tom případě máme 4 možnosti, které obsahují základnu, a 4, které ji neobsahují.

b) Laplaceova matice:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Počet koster:

$$|L^{1,1}| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 960.$$

Úloha 7. Dokažte, že pokud A je horní (dolní) trojúhelníková matice, pak i $\text{adj } A$ je horní (dolní) trojúhelníková.

Řešení: Při výpočtu prvku $(\text{adj } A)_{ij}$ pod diagonálou počítáme determinant horní trojúhelníkové matice, která má na diagonále aspoň jednu nulu (od $(i-1)$ -ního sloupce doleva, přičemž nutně $i \geq 2$).