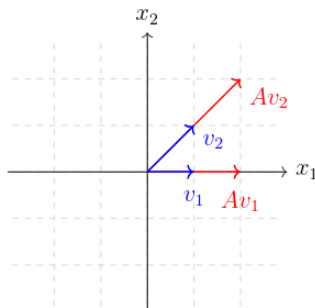


Úloha 1. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Najděte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a zkuste je geometricky vysvětlit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

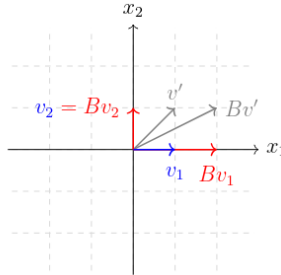
Řešení:

a) Zobrazení $f(x) = Ax$ odpovídá zdvojnásobení vektoru x . Libovolný nenulový vektor je tedy vlastním vektorem A — zobrazení f ho dvakrát prodlouží, ale nezmění směr. Jediné vlastní číslo je $\lambda = 2$.



b) $f(x) = Bx$ zvětšuje v první souřadnici. Vektory na ose x_1 se dvakrát prodlouží a nezmění směr, vektory na ose x_2 zůstanou stejné. Máme

- vlastní číslo 2 odpovídající všem nenulovým vektorům tvaru $(\alpha, 0)$, které tvoří vlastní vektory,
- vl. č. 1, jehož vlastní vektory jsou nenulové vektory tvaru $(0, \beta)$.



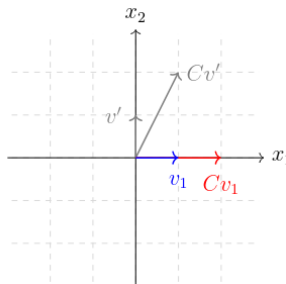
c) Toto zobrazení odpovídá zkosení a zvětšení.

$$f((x_1, x_2)^T) = Cx = (2x_1 + x_2, 2x_2)^T.$$

Vlastní vektory matice C jsou všechny nenulové vektory $(\alpha, 0)$ ležící na ose x_1 . Platí

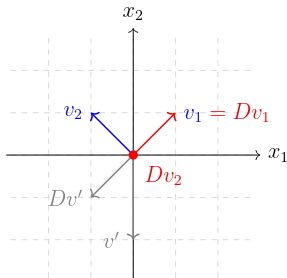
$$f((\alpha, 0)^T) = (2\alpha, 0)^T,$$

takže příslušné vlastní číslo je $\lambda = 2$.



d) Lineární zobrazení $f(x) = Dx$ odpovídá kolmé projekci na přímku „ $x_1 = x_2$ “. Vektory této přímky f nemění, takže nenulové takové vektory jsou vlastní vektory příslušící vlastnímu číslu 1.

Také nenulové vektory kolmé na tuto přímku (tedy nenulové vektory tvaru $(-\alpha, \alpha)$) tvoří vlastní vektory. Zobrazí se na počátek, takže příslušné vlastní číslo je 0.



Úloha 2. Určete součet, rozdíl, součin a podíl následujících polynomů p a q .

(a) $p(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $q(x) = 3x^2 - 1x + 5$ nad \mathbb{R} ,

(b) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 2$ nad \mathbb{Z}_5 .

Řešení:

a) Součet a rozdíl po složkách:

$$(p + q)(x) = 5x^3 + 6x^2 + 3x + 8$$

$$(p - q)(x) = 5x^3 + 5x - 2$$

Součin roznásobením — lze použít i známý postup pro součin vicemístných čísel:

$$(pq)(x) = 15x^5 + 4x^4 + 34x^3 + 20x^2 + 17x + 2$$

Podíl:

$$p(x) = q(x) \cdot \left(\frac{5}{3}x + \frac{14}{9}\right) - \left(\frac{25}{9}x + \frac{43}{9}\right).$$

b)

$$(p + q)(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 3$$

$$(p - q)(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 4$$

Součin: $(pq)(x) = 3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2$.

Dále lze eliminovat mocniny vyšší než 5 podle Malé Fermatovy věty a získat polynom, jež nabývá pro $x \in \mathbb{Z}_5$ stejných hodnot:

$$3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2 \rightarrow 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

Podíl:

$$p(x) = q(x) \cdot (3x + 1) + (x + 4).$$

Úloha 3. V tělese \mathbb{Z}_p nalezněte polynom stupně nejvýše $p - 1$, který nabývá stejných hodnot pro $x \in \mathbb{Z}_p$.

(a) V tělese \mathbb{Z}_5 , $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.

(b) V tělese \mathbb{Z}_7 , $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

Řešení: Přímočaře nahrazujeme mocniny x^k s $k \geq p$ za x^{k-p+1} .

(a) $4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$

(b) $x^6 + x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x + 1$

Úloha 4. Proložte kvadratický polynom (parabolu) body

(a) $(-1, -9)$, $(1, -3)$ a $(2, 3)$,

(b) $(-1, 10)$, $(1, 4)$ a $(4, 25)$.

Vyzkoušejte si na tom jak interpolaci pomocí Vandermondovy matice, tak Lagrangeovu interpolaci.

Řešení: Vandermondovu matici jsme na cviku používali už minulý semestr (aniž bychom jí tak říkali). Ta vede na následující soustavu

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right),$$

$$(b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 25 \end{array} \right).$$

Jejich vyřešením samozřejmě dostaneme stejné koeficienty jako když použijeme Lagrangeovu interpolaci:

a)

$$p_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{6},$$

$$p_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-2)}{(1-(-1))(1-2)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2},$$

$$p_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(2-(-1))(2-1)} = \frac{x^2 - 1}{3}.$$

Z pomocných polynomů složíme hledaný polynom:

$$p(x) = -9p_1(x) - 3p_2(x) + 3p_3(x) = \frac{6x^2 + 18x - 42}{6} = x^2 + 3x - 7.$$

b)

$$p_1(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{10},$$

$$p_2(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{6},$$

$$p_3(x) = \frac{x^2 - 1}{15},$$

z čehož

$$p(x) = 10p_1(x) + 4p_2(x) + 25p_3(x) = 2x^2 - 3x + 5.$$

Úloha 5. Vyjádřete $\det(\text{adj}(A))$ pomocí $\det(A)$.

Řešení: Pokud je A regulární, můžeme $\text{adj } A$ vyjádřit pomocí inverzní matice:

$$\begin{aligned} |\text{adj } A| &= |\det(A)A^{-1}| = \det(A)^n |A^{-1}| \\ &= \frac{\det(A)^n}{\det(A)} = \det(A)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pro singulární A stále platí $A \cdot \text{adj } A = \det(A) \cdot I = 0 \cdot I = 0$. Můžeme rozmyslet, že $\text{adj } A$ musí být také singulární, protože je-li A nulová matice, je i $\text{adj } A = 0$, a pro nenulové $A \neq 0$ neexistuje regulární matice, která by po vynásobení A dala nulu.

Je-li tedy A singulární, dostáváme $\det(\text{adj}(A)) = 0$, což je ale naráz rovno $\det(A)^{n-1}$. V každém případě tedy platí

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$