

**Úloha 1.** Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem  $\mathbb{C}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*Řešení:*

a)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 6 \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 6 \cdot 6. \end{aligned}$$

Polynom upravme a najdeme jeho kořeny (a tím vlastní čísla  $A$ ):

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 36 = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda - 6)(\lambda + 7).$$

Našli jsme tak vlastní čísla  $\lambda_1 = 6$  a  $\lambda_2 = -7$ .

Vlastní vektory příslušící danému vlastnímu číslu  $\lambda$  určíme nalezením jádra matice  $A - \lambda I$ . Pro vlastní číslo  $\lambda_1 = 6$  tedy hledáme bázi jádra matice

$$\begin{pmatrix} 2 - 6 & 6 \\ 6 & -3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kterou tvoří např. vektor  $x_1 = (3, 2)^T$ .

Podobně zjistíme, že bázi  $\text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$  tvoří např. vektor  $x_2 = (2, -3)^T$ .

Matice  $A$  má tedy vlastní číslo  $\lambda_1$  s odpovídajícím vlastním vektorem  $x_1 = (3, 2)^T$  a vlastní číslo  $\lambda_2 = -7$  s vlastním vektorem  $x_2 = (2, -3)^T$ . Každý nenulový násobek vlastního vektoru je také vlastním vektorem.

b) Stejným postupem zjistíme, že charakteristický polynom matice  $B$ ,  $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$  má pouze komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Vlastním vektorem příslušícím  $\lambda_1 = 1 + i$  je např.  $x_1 = (1, 1 + i)^T$ .

K  $\lambda_2 = 1 - i$  pak patří např. vlastní vektor  $x_2 = (1, 1 - i)^T$ .

c) Postupujeme stejně jako u matic  $2 \times 2$ . Zjistíme, že

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = -(\lambda + 1)^3.$$

Matice  $C$  má tedy jediné vlastní číslo  $\lambda = -1$  s algebraickou násobností 3. Dále nás zajímá jádro matice

$$\begin{pmatrix} 2 - (-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3 - (-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeho bázi tvoří např. vektor  $(1, 1, -1)^T$ . Geometrická násobnost vlastního čísla  $\lambda$  je tedy jen 1.

**Úloha 2.** Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  najděte všechna vlastní čísla, jejich algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory.

*Řešení:* Hledáme nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  kořeny polynomu  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2$ . Prostým dosazením  $p_A(0) = 2, p_A(1) = 0, p_A(2) = 0, p_A(3) = 1, p_A(4) = 2$  se dozvíme, že vlastními čísly  $A$  jsou právě  $\lambda_1 = 1$  a  $\lambda_2 = 2$ . Abychom zjistili jejich algebraické násobnosti, vydělíme  $p_A(\lambda)$  polynomem  $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ . Dostaneme

$$(4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2) : (\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 4(\lambda + 4),$$

takže  $p_A(\lambda) = 4(\lambda + 4)^2(\lambda + 3)$ , a tedy vlastní číslo 1 má algebraickou násobnost 2 a vlastní číslo 2 má algebraickou násobnost 1.

Pojďme určit příslušné vlastní vektory. Řešíme homogenní soustavy s maticemi

$$M_1 := A - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad M_2 = A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dostaneme (například)  $\text{Ker}(M_1) = \text{span}\{(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T\}$  a  $\text{Ker}(M_2) = \text{span}\{(1, 3, 4)^T\}$ , čímž jsme našli dva vlastní vektory vlastního čísla  $\lambda_1$  a jeden pro  $\lambda_2$ .

**Úloha 3.** Matice  $A$  má vlastní čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  a jim odpovídající vlastní vektory  $x_1, \dots, x_n$ . Určete, jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory

- (a) matice  $A^2$ , (c) matice  $A + \alpha I_n$ ,  
 (b) matice  $\alpha A$ , (d) matice  $A^T$ .

*Řešení:* Všechna řešení (až na **d**) se dají odhadnout, když matice interpretujeme jako reprezentace lineárních zobrazení v nějakém vektorovém prostoru. Zde ukážeme pevné důkazy, že intuice neklame:

**a)** Platí

$$A^2 x_i = A(Ax_i) = A \cdot \lambda_i x_i = \lambda_i (Ax_i) = \lambda_i^2 x_i.$$

Vlastní vektory tedy zůstávají, ale odpovídají jim teď vlastní čísla  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ .

**b)** Zde podobně

$$\alpha Ax_i = \alpha \lambda_i x_i,$$

takže vlastní vektory se opět nemění, akorát jim odpovídají vlastní čísla  $\alpha \lambda_1, \dots, \alpha \lambda_n$ .

**c)** Jak se chová odpovídající zobrazení „ $f(x)$ “? Sčítá  $Ax$  a  $\alpha$ -násobek  $x$ . Opět si to rozepišme:

$$(A + \alpha I)x_i = Ax_i + \alpha x_i = (\lambda_i + \alpha)x_i.$$

Ani tentokrát se nemění vlastní vektory, ale vlastní čísla jsou teď  $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ .

**d)** Zde se naopak nemohou změnit vlastní čísla. Determinant každé matice je stejný jako determinant její transpozice. Chci říct, že

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I) = p_{A^T}(\lambda).$$

Vlastní vektory transponované matice se ale můžou chovat dost různě. Hezkou formulí nevyjídříme, jak se změní.

**Úloha 4.** Známe tři vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix},$$

a to  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -4$  a  $\lambda_3 = 5$ . Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

*Řešení:* Tady se dalo postupovat několika způsoby. Umíme najít charakteristický polynom  $p_A(\lambda)$  a víme, že ho dělí tři konkrétní polynomy tvaru  $(\lambda - \lambda_i)$ . Z toho se dá poměrně pracně dopočítat, že hledané vlastní číslo je  $\lambda_4 = 7$ .

Jednodušší je si uvědomit (nebo vzpomenout, pokud to bylo zmíněno na přednášce), že  $\det(A)$  je roven součinu vlastních čísel  $A$  (chci taky poukázat, že tenhle vztah je aspoň pro reálné vektorové prostory ohromně intuitivní když se opíráme o geometrické interpretace determinantu a vlastních čísel).

Jsou-li  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vlastní čísla  $A$  (kde každé  $\lambda_i$  zahrneme tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost), pak platí

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Dosazením  $\lambda = 0$  dostaneme vztah

$$\det(A) = (-1)^n (-\lambda_1) \cdots (-\lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

tak jak tvrdím.

Podle téhle formule tak stačí najít determinant  $A$  a vydělit ho všemi danými vlastními čísly. To je o trochu méně pracné. Kdyby ale byl determinant nulový, tahle formule nám nestačí.

*Nejjednodušší* a naráz univerzální postup nám dá následující obecně platná formule (pro libovolnou matici  $A$  s vlastními čísly  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Díky tomu pouze sečteme diagonální prvky  $A$  a odečteme známá vlastní čísla, a skoro bez práce máme naše  $\lambda_4 = 7$ .

I tahle formule pravděpodobně už byla nebo bude na přednášce (a vzpomeňme taky na větu o Gerschgorinových kruzích, která dává do souvislosti diagonálu  $A$  a vlastní čísla), pro úplnost ale sepíšu i její krátký důkaz:

Dvěma způsoby spočítáme koeficient  $b_{n-1}$  u  $\lambda^{n-1}$  v charakteristickém polynomu  $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$ : Definice determinantu říká, že v  $\det(A - \lambda I_n)$  monom  $b_{n-1} \lambda^{n-1}$  vznikne jen z identické permutace, tj. pouze ze součinu  $(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$ , a má tak hodnotu

$$b_{n-1} = (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}).$$

Zároveň ale platí, že  $p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ , z čehož

$$b_{n-1} = (-1)^n (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n).$$

Dostali jsme tak rovnost

$$(-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) = (-1)^n (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n).$$

■

**Úloha 5.** Necht  $f$  je lineární zobrazení na podprostoru  $\text{span}\{(1, 0, 1)^T, (2, -1, 0)^T\}$  prostoru  $\mathbb{R}^3$ , pro které platí

$$f((1, 0, 1)^T) = (9, -4, 1)^T \quad \text{a} \quad f((2, -1, 0)^T) = (-3, 2, 1)^T.$$

Spočítejte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory zobrazení  $f$ .

*Řešení:* Najdeme matici zobrazení  $f$  vzhledem ke vhodné zvolené bázi prostoru  $V = \text{span}\{(1, 0, 1)^T, (2, -1, 0)^T\}$ . Nabízí se báze

$$B = ((1, 0, 1)^T, (2, -1, 0)^T).$$

Spočítáme

$$\left[ \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \left[ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom  $f$  je roven charakteristickému polynomu matice  ${}_B[f]_B$  (nabízí se otázka, „Doopravdy bychom dostali stejný polynom kdybychom jinak

zvolili bázi?“, na kterou je odpověď **ano**, jak se už brzy probeře na přednáškách). Ten je roven

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

takže naše zobrazení má vlastní čísla 2 a  $-3$ . Příslušné prostory vlastních vektorů vyjádřené v bázi  $B$  jsou potom

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \text{span}\{(1, 1)^T\} \text{ a}$$

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\{(1, -4)^T\}.$$

Z toho už dopočteme, že  $f$  má vlastní číslo 2 s odpovídajícím vlastním vektorem  $(3, -1, 1)^T$  a vlastní číslo  $-3$ , jemuž odpovídá vlastní vektor  $(-7, 4, 1)^T$ .

**Úloha 6.** Pro každé prvočíslo  $p$  nalezněte matici typu  $2 \times 2$  nad  $\mathbb{Z}_p$ , která nebude mít žádné vlastní číslo (v  $\mathbb{Z}_p$ ).

*Řešení:* Pro  $p = 2$  funguje např.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Pro liché  $p$  můžeme vzít takové  $a \in \mathbb{Z}_p$ , že rovnice  $x^2 = a$  nemá (v  $\mathbb{Z}_p$ ) řešení, a zvolit

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Pro liché  $p$  je 0 jediné  $x \in \mathbb{Z}_p$ , pro které  $x = -x$ , ale naráz  $x^2 = (-x)^2$ , takže čísla  $1, \dots, p-1$  mají maximálně  $\frac{p-1}{2}$  různých obrazů vůči  $x \mapsto x^2$ .)