

Úloha 1. Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechny $\beta > \alpha$.

Řešení: Necht' $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou reálná vlastní čísla matice A . Pak $\alpha = -\lambda_n$ z definice vlastních čísel, protože matice $(A - \beta I_n)$ je regulární právě pro ty β , co nejsou vlastní čísla.

Pokud A nemá reálná vlastní čísla, je „ $\alpha = -\infty$ “.

Úloha 2. Určete, zda jsou následující matice diagonalizovatelné:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení: Jak víme z přednášky, čtvercová matice řádu n (a příslušné lineární zobrazení na prostoru dimenze n) je diagonalizovatelná, právě když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Za úkol tedy je rozhodnout, zda se geometrická násobnost každého vlastního čísla rovná té algebraické.

Charakteristický polynom matice A je

$$p_A(\lambda) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda),$$

takže jsme našli tři různá vlastní čísla trojdimenzionálního zobrazení a můžeme rovnou říct, že A je diagonalizovatelná.

Pro matici B je to podobné, jen vyjdou dvě (různá) komplexní vlastní čísla $1 \pm i$. Matice je také diagonalizovatelná.

Charakteristický polynom C čka je $p_C(\lambda) = (5 - \lambda)^2$, takže C má vlastní číslo 5 s algebraickou násobností 2. Jeho vlastní vektory tvoří jádro matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, která má hodnotu 1, takže vlastnímu číslu 5 náleží jen jeden vlastní vektor. C není diagonalizovatelná.

Vyšetření D čka je usnadněné tím, že jde o trojúhelníkovou matici a rovnou vidíme, že jen potřebujeme zjistit, jakou geometrickou násobnost má vlastní číslo 7 s algebraickou násobností 2. Hodnota matice

$$D - 7I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je 1 (a její jádro má tak dimenzi 2), takže dvojnásobné vlastní číslo 7 má dva (lineárně nezávislé) vlastní vektory, a matice D je diagonalizovatelná.

Úloha 3. Rozhodněte o platnosti „ $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$.“
Jak to je s opačnou implikací?

Řešení: Máme $A^2 = SBS^{-1}SBS^{-1} = SB^2S^{-1}$, takže tvrzení platí. Opačná implikace platit nemusí. Snadným protipříkladem jsou matice I_n a $-I_n$. Ty mají různá vlastní čísla, a tedy nejsou podobné, ale druhá mocnina obou je I_n .

Úloha 4. Rozložte následující matice na součin SDS^{-1} , kde S je regulární a D diagonální.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = A^T, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení: Vždy spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory dané matice. Pokud je vlastních vektorů plný počet (tj. n , tj. 3 lineárně nezávislé), sestrojíme samotný rozklad.

Saarusovo pravidlo nám rovnou dá vlastní čísla A :

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(4 - \lambda).$$

Rovnou vidíme, že A je diagonalizovatelná (má n různých vlastních čísel). Nalezeným vlastním číslům 2, 1, 4 odpovídají (lineárně nezávislé) vlastní vektory $(1, 2, 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$. Využijeme je jako sloupce hledaného S :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

B má, jakožto transpozice A , stejná vlastní čísla, takže ani teď se nevyhneme samotné diagonalizaci. Nebude to ale těžké, protože

$$A^T = (SDS^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^{-1})^T D S^T,$$

takže jsme už vlastně rozklad spočítali v minulé úloze.

Pro C rozklad vyjde podobný jako pro A , jen je to víc počítání (protože charakteristický polynom nedostaneme Saarusovým pravidlem zadarmo). Vlastní čísla zase vyjdou 4, 2, 1, a odpovídají jim vlastní vektory $(0, 1, 1)^T$, $(1, 2, 1)^T$, $(2, 1, 0)^T$. Z toho už

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Ověřte pro ni Cayleyho-Hamiltonovu větu.
- (b) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A .
- (c) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A .

Řešení: a)

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Dosazením A do formálního polynomu dostaneme

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_n = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Pro vyjádření A^4 potřebujeme λ^4 vydělit polynomem $p_A(\lambda)$ se zbytkem, čímž dostaneme

$$\lambda^4 = (\lambda^2 + 5\lambda + 27)p_A(\lambda) + 145\lambda + 54.$$

Proto platí

$$A^4 = 0_{2 \times 2} + 145A + 54I_n.$$

c) Z Cayleyho-Hamiltonovy věty víme, že

$$0 = p_A(A) = A^2 - 5A - 2I_2.$$

Vynásobením maticí A^{-1} dostaneme

$$0 = A - 5I_2 - 2A^{-1},$$

neboli

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2.$$

Úloha 6. Dokažte Cayleyho-Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Řešení: Mějme diagonalizovatelnou $A = SAS^{-1}$ (kde Λ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále) s charakteristickým polynomem

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0.$$

Dosadíme

$$p_A(A) = (-1)^n (SAS^{-1})^n + b_{n-1} (SAS^{-1})^{n-1} + \dots + b_1 SAS^{-1} + b_0 I_n.$$

Přitom $A^k = (SAS^{-1})^k = SAS^{-1}(SAS^{-1})^{k-1} = S\Lambda^k S^{-1}$, takže výraz upravíme na

$$(-1)^n S\Lambda^n + \dots + b_0 S I_n S^{-1},$$

a vytknutím S a S^{-1} dostaneme

$$S \left((-1)^n \Lambda^n + b_{n-1} \Lambda^{n-1} + \dots + b_0 I_n \right) S^{-1}.$$

Dostali jsme výraz tvaru SMS^{-1} . Když se zamyslíme nad maticí M , která vyjde v závorce, vidíme, že mimo diagonálu má jen nuly a i -tý diagonální prvek je roven

$$M_{ii} = (-1)^n \lambda_i^n + b_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots + b_1 \lambda_i + b_0,$$

což je z definice vlastních čísel taky nula. Celá matice $p_A(A) = SMS^{-1}$ je proto nulová, jak tvrdí Cayleyho-Hamiltonova věta.

Úloha 7. Je-li φ lineární zobrazení na vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 nad tělesem \mathbb{Z}_5 s maticí

$${}_{kan}[\varphi]_{kan} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ověřte, že φ je bijekce a rozhodněte, zda jsou zobrazení φ a φ^{-1} diagonalizovatelná.

Řešení: Charakteristický polynom matice je

$$p_{{}_{kan}[\varphi]_{kan}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 3 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Dosazením za λ všech hodnot tělesa \mathbb{Z}_5 zjistíme, že vlastní čísla jsou hodnoty $\{1, 2, 3\}$. Zobrazení φ je trojdimenzionální a jak vidíme, má tři různá vlastní čísla. Je tedy nutně diagonalizovatelné.

Nula není vlastním číslem ${}_{kan}[\varphi]_{kan}$, takže φ má (lineární) inverz φ^{-1} . Protože

$$\lambda\varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(\lambda v) = \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v$$

pro každé vlastní číslo λ a jemu příslušný vlastní vektor v , jsou čísla $\{1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}\} = \{1, 3, 2\}$ opět všechna vlastní čísla φ^{-1} , a i tohle zobrazení je diagonalizovatelné.