

Úloha 1. Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$. Může pomoci nejprve najít matici 3×3 s libovolným (ale jediným) jedním vlastním vektorem.

Řešení: Asi nejjednodušší způsob, jak získat matici s jediným vlastním vektorem, je zvolit Jordanovu buňku

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní vektor je ale $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Abychom matici transformovali na takovou, jejíž jediný vlastní vektor je $(1, 1, 1)^T$, můžeme využít podobnosti a uvažovat matici tvaru $S^{-1}J_3(0)S$.

Chceme přitom

$$Av = S^{-1}J_3(0)Sv = \lambda v.$$

Přenásobením maticí S zleva dostaneme $J_3(0)Sv = \lambda Sv$, tedy Sv je vlastním vektorem $J_3(0)$. Sečteno podtrženo, chceme takovou regulární matici S , aby

$$Sv = S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Takových regulárních S je spousta, vyberme si nějakou jednoduchou:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice je potom

$$A = S^{-1}J_3(0)S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme ověřit, že jsme splnili zadání. A má teď jediné vlastní číslo 0, které je trojnásobné a přísluší mu jediný vlastní vektor v .

Úloha 2. V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\text{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Řešení: $\dim \text{Ker}(A - 8I_{16}) = 16 - 9 = 7$, takže vlastní číslo 8 je v sedmi buňkách.

Úloha 3. Pro následující (symetrickou) matici A najděte spektrální rozklad tvaru $Q\Lambda Q^T$ (kde Λ je diagonální matice).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: A má jednonásobné vlastní číslo 3 a dvojnásobné 0. Trojce přísluší vlastní vektor $v_1 = (1, 1, 1)^T$ a nule např. $v_2 = (1, -1, 0)^T$ a $v_3 = (1, 1, -2)^T$. Pro $i \neq j$ platí $v_i^T v_j = 0$.

Pokud sestavíme matice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

dostaneme spektrální rozklad tvaru $S\Lambda S^{-1}$. Ortogonální matici už však dostaneme snadno, protože můžeme předefinovat

$$v'_i = \frac{1}{\sqrt{v_i^T v_i}} v_i.$$

Tím docílíme toho, že pro každé i platí $v_i^T v_i = 1$, a tak dostaneme hledanou Q (tím, že výsledná v'_i dáme do sloupců):

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Úloha 4. Najděte reálnou ortogonální (takovou, že $U^T U = I_n$) matici U , pro níž je $U^T A U$ diagonální, jestliže

$$(a) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Obě matice jsou symetrické, tedy ortogonálně diagonalizovatelné.

a) Obvyklým způsobem počítáme $p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 8)$, vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -2$, kterému přísluší vlastní vektor $v_1 = (-3, 1)^T$ a $\lambda_2 = 8$, kterému přísluší $v_2 = (1, 3)^T$.

Je podstatné, že $v_1^T v_2 = v_2^T v_1 = 0$, ale k získání ortogonální matice potřebujeme navíc $v_1'^T v_1' = v_2'^T v_2' = 1$, takže dostaneme

$$U^T A U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) Určíme vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice A . Jedno vlastní číslo je zřejmě $\lambda_1 = 3$. Vyřešíme homogenní soustavu rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a dostaneme $\text{Ker}(f - 3 \text{id}) = \text{span}\{v_1 = (-1, 1, 0)^T, v_2 = (-1, -1, 2)^T\}$.

Poslední vlastní vektor bude kolmý na $\text{Ker}(f - 3 \text{id})$, takže zvolme např. $v_3 = (1, 1, 1)^T$. Spočítáme, že

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix},$$

takže tento vlastní vektor v_3 odpovídá vlastnímu číslu $\lambda_2 = 9$.

Vektory v_i jsem volil tak, aby na sebe rovnou byly kolmé (tj. $v_i^T v_j = 0$ pro $i \neq j$). Potřebujeme je tedy jen „normalizovat“ na

$$v_i' = \frac{1}{\sqrt{v_i^T v_i}} v_i,$$

a dostat finální rozklad

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Řešení: Uvažme vlastní číslo λ matice $A^T A$ a jemu odpovídající vlastní vektor x , neboli

$$A^T A x = \lambda x.$$

Pak platí, že

$$x^T A^T A x = \lambda x^T x = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (\text{přičemž alespoň jedno } x_i \text{ je nenulové}).$$

Když přitom definujeme $y := Ax$, dostaneme, že

$$x^T A^T A x = y^T y = \sum_{j=1}^m y_j^2 \geq 0.$$

λ tedy nemůže být záporná, protože pak by první odvození dalo záporné číslo a druhé nezáporné.

Naráz vidíme, že $\lambda = 0$ nastane pouze pokud $y^T y = 0$ (když jsou všechna y_i nulová), neboli když $Ax = 0$ pro nenulové x , a tedy jen pokud jsou sloupce A lineárně závislé. Jsou-li sloupce A lineárně nezávislé, všechna vlastní čísla $A^T A$ budou kladná.

Úloha 6. Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Úloha spočívá jen v odhalení algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel.

Matice A je diagonální a rovnou proto víme, že má (algebraicky) dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ a jednonásobné $\lambda_2 = 2$. Vlastní číslo λ_2 nutně leží v jedné Jordanově buňce (1×1), ale λ_1 může ležet v jedné, nebo ve dvou. Spočítáním $\text{rank}(A - 1 \cdot I_3) = 1$ odhalíme, že geometrická násobnost λ_1 je dva. Matice je tedy diagonalizovatelná a hledaná Jordanova forma je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice B se od A liší jedním prvkem, který zajistí, že (vlastní čísla jsou stejná se stejnými algebraickými násobnostmi a) $\text{rank}(A - \lambda_1 I_3) = 2$, takže tentokrát je geometrická násobnost λ_1 rovna jedné. Jordanova forma matice B je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice C má dvě dvojnásobná vlastní čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 3$. Protože $\text{rank}(A - \lambda_1 I_4) = 2$ a $\text{rank}(A - \lambda_2 I_4) = 3$, λ_1 leží ve dvou buňkách, zatímco λ_2 v jedné:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 7. Uvažujme lineární zobrazení $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ určené maticí

$${}_{kan}[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Najděte bázi B , vůči které bude matice f v Jordanově tvaru,
 (b) spočítejte ${}_B[f^{45}]_B$,
 (c) položíme-li $A = \frac{1}{3}{}_{kan}[f]_{kan}$, spočítejte mocninu A^{45} .

Řešení: a) Spočteme $p_f(\lambda) = (3-\lambda)^3$. Zobrazení f má tedy jediné vlastní číslo 3 (algebraické) násobnosti 3. Určíme množinu příslušných vlastních vektorů:

$$\text{Ker}(f - 3 \text{id}) = \text{Ker}({}_{kan}[f]_{kan} - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zvolíme si například vlastní vektor $v_1 = (-2, 0, 2)^T$ a dále počítáme Jordanův řetízek. Řešením nehomogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

dostaneme přímku $(0, 1, 0)^T + \text{span} \{(-1, 0, 1)^T\}$ těch vektorů x , pro které

$$(f - 3 \text{id})(x) = v_1 \quad (\text{čímž } (f - 3 \text{id})^2 x = 0).$$

Za vektor v_2 můžeme zvolit libovolný její bod, např. $v_2 = (-1, 1, 1)^T$. Dále tak řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

a volíme nějaké její řešení, třeba $v_3 := (1, 0, 0)^T$. Našli jsme bázi

$$B = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{pro níž } {}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Jordanova věta nám může pomoci při počítání mocnin. Mocninu libovolné Jordanovy buňky dostaneme jako

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix},$$

kde případně pro $r > k$ položíme $\binom{k}{r}\lambda^{k-r} = 0$.

To použijeme na matici

$${}_B[f^{45}]_B = {}_B[f]_B^{45} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{45} = \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix}.$$

c) V (a) jsme fakticky spočítali takové $P = {}_{kan}[id]_B$, že $3A = PJP^{-1}$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice ${}_{kan}[f]_{kan}$. Proto

$$A^k = P \frac{1}{3} J P^{-1} \cdot P \frac{1}{3} J P^{-1} \dots P \frac{1}{3} J P^{-1} = P \frac{1}{3^k} J^k P^{-1}.$$

Popsaným postupem najdeme A^{45} :

$$\begin{aligned} A^{45} &= \frac{1}{3^{45}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} & 990 \cdot 3^{43} \\ 0 & 3^{45} & 45 \cdot 3^{44} \\ 0 & 0 & 3^{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 & 110 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -234 & -30 & -235 \\ 15 & 1 & 15 \\ 235 & 30 & 236 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$