Úloha 1. Rozhodněte, zda jsou následující matice ortogonální:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice Q je ortogonální, právě když $Q^T Q = I_n$.
Pro první matici vyjde

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

není tedy ortogonální (má sice ortogonální sloupce, ale ty nemají jednotkovou velikost).

Pro další dvě matice vyjde $B^T B = I_2, C^T C = I_3$, takže jsou ortogonální.

Úloha 2. Ukažte, že spektrální rozklad $Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Řešení: Z přednášky víme, že každá symetrická matice má takový rozklad. Když takový rozklad existuje, máme

$$A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = (Q^T)^T \Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A,$$

takže matice s takovým rozkladem je vždy symetrická.

Úloha 3. Buďte $M, N \subseteq V$ podmnožiny vektorového prostoru V.
Ukažte, že $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Řešení:

$$M^\perp \cap N^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in M: \ \langle x, y\rangle = 0\} \cap \{x \in V \mid \forall y \in N: \ \langle x, y\rangle = 0\},$$

$M^\perp \cap N^\perp$ je tedy množina vektorů, které jsou kolmé jak na vektory z množiny M, tak na vektory z množiny N. Jsou tedy kolmé na všechny vektory množiny $M \cup N$, což dává přímo definici $(M \cup N)^\perp$.

Úloha 4. Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^\perp$.

Řešení: Víme, že pro $U \Subset V$ platí $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$, takže požadovaný podprostor U nemůže existovat (musel by mít neceločíselnou dimenzi).

Úloha 5. Určete vzdálenost bodu $a = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny ρ procházející počátkem a body $b = (0, 1, -1, 0)^T$ a $c = (4, -2, 2, -1)^T$.

Řešení: Spočítáme projekci $p_\rho(a)$ vektoru a do rovinu ρ. Hledaná vzdálenost bodu od roviny je pak rovna vzdálenosti a od $p_\rho(a)$.

„Učebnicový postup“ nejprve najde ortonormální bázi podprostoru ρ, což uděláme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací vektorů b a c, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} b' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T \\ c' &= \frac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T. \end{aligned}$$

Projekce $p_\rho(a)$ má potom tvar

$$\begin{aligned} p_\rho(a) &= \langle a, b' \rangle b' + \langle a, c' \rangle c' \\ &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1, 0)^T + \sqrt{17}\frac{\sqrt{17}}{17}(4, 0, 0, -1)^T \\ &= (4, 1, -1, -1)^T. \end{aligned}$$

Teď už zbývá jen dopočítat požadovanou vzdálenost:

$$\|a - p_\rho(a)\| = \|(5, 5, 3, 3)^T - (4, 1, -1, -1)^T\| = \|(1, 4, 4, 4)^T\| = 7.$$

Úloha 6. Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zkusíme najít Choleského rozklady.
Pro první matice se to povede, dostaneme $A = U^T U$, kde

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže A je pozitivně definitní.

Když se o to samé pokusíme pro matici B, vyjde nám, že příslušná horní trojúhelníková matice U_B musí mít první dva sloupce

$$U_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix},$$

kde rovnou na diagonále na pozici $(2, 2)$ vidíme nekladnou hodnotu (a ani by nebylo možné vyplnit třetí sloupec aby platilo $B = U_B^T U_B$), takže B *není* pozitivně definitní.