

**Úloha 1.** Necht'  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jsou pozitivně definitní.

- Ukažt'ě, že  $A + B$  je také pozitivně definitní.
- Jak to bude se součtem pozitivně *semi*definitních matic?
- Jak to bude se součtem pozitivně *semi*definitní a pozitivně definitní matice?
- Jak to bude s násobkem pozitivně (semi)definitních matic  $\alpha A$ ?

*Řešení:*

- $x^T(A + B)x = x^T Ax + x^T Bx$ , přičemž oba sčítance jsou nezáporné a jsou kladné pro všechna nenulová  $x$ .
- Úplně stejně nahlédneme, že součet je také nutně pozitivně *semi*definitní.
- Součet bude pozitivně definitní (opět stejným argumentem).
- $x^T \alpha Ax = \alpha(x^T Ax)$ . Proto je  $\alpha A$  pozitivně (semi)definitní pro  $\alpha > 0$  (a je negativně (semi)definitní pro  $\alpha < 0$ ).

**Úloha 2.** Otestujte pozitivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Řešení:* Zkusíme najít Choleského rozklady.

Pro první matice se to povede, dostaneme  $A = U^T U$ , kde

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže  $A$  je pozitivně definitní.

Když se o to samé pokusíme pro matici  $B$ , vyjde nám, že příslušná horní trojúhelníková matice  $U_B$  musí mít první dva sloupce

$$U_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix},$$

kde rovnou na diagonále na pozici (2,2) vidíme nekladnou hodnotu (a ani by nebylo možné vyplnit třetí sloupec aby platilo  $B = U_B^T U_B$ ), takže  $B$  *není* pozitivně definitní.

**Úloha 3.** Ukažte, že libovolná mocnina pozitivně (semi)definitní matice je pozitivně (semi)definitní.

*Řešení:* Má-li matice  $A$  vlastní čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , její mocnina  $A^k$  má vlastní čísla  $\lambda_1^k, \dots, \lambda_m^k$ . Pozitivně definitní matice má všechna vlastní čísla kladná, což se mocněním zachová. To samé platí pro semidefinitní matici a její nezáporná vlastní čísla.

**Úloha 4.** Najděte regulární matici, která je pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.

*Řešení:* Pozitivně semidefinitní matice má nezáporná vlastní čísla. Pokud je regulární, nemůže mít nulové vlastní číslo, a její vlastní čísla jsou proto všechna kladná. V takovém případě už jde o pozitivně definitní matici, takže hledaná matice neexistuje.

**Úloha 5.** Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

S pomocí rozkladu pak najděte  $A^{-1}$ .

*Řešení:* Platí  $A = L^T L$  pro

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro inverzi tedy platí  $A^{-1} = (L^T L)^{-1} = L^{-1} L^{-T}$ . Standardním způsobem teď můžeme najít inverz horní trojúhelníkové matice

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a teď jen stačí vyjádřit hledanou inverzi

$$A^{-1} = L^{-1} (L^{-1})^T = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Úloha 6.** Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

*Řešení:* Choleského rozklad  $A = L^T L$  je

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

S touto trojúhelníkovou maticí nejprve zpětnou substitucí vyřešíme soustavu  $L^T y = b$ , vyjde

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Teď zpětnou substitucí vyřešíme  $Lx = y$ , a dostaneme výsledek  $x = (1, 3, 2)^T$ .