Cvičení 2

Kvíz: Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů matic $n \times n$ (bez ohledu na prvky)? Kolik jich existuje pro matice 4×3? A kolik pro matice 3×4?

Úloha 1. Zapiště maticí a vyřešte eliminací následující soustavu.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 \\ -3x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Každou matici v průběhu eliminace znázorněte graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled) a součet vektorů (tzv. sloupcový pohled).

Úloha 2. Co nám sloupcový pohled říká o této soustavě?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= -5 \\ 2x_1 + 2x_2 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Úloha 3. Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou-Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \qquad \text{(b)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \qquad \text{(c)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Úloha 4. (z minule) Co nejefektivněji vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Úloha 5. (*skoro* z minule) Vyřešte soustavu s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$$

Úloha 6. (z minule) Najděte soustavu lineárních rovnic se zadaným řešením.

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$,

(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}$.

Úloha 7. Vyřešte následující soustavy n rovnic o n neznámých, kde vektor pravých stran je vektor samých jedniček.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$