Cvičení 4

Kvíz: Mezi následujícími strukturami zakroužkujte všechny grupy. Zvlášť vyznačte abelovské grupy.

(a) $\big(\text{matice } \mathbb{R}^{2\times 2},\ +\big)$,
(b) $\big(\text{matice } \mathbb{R}^{2\times 2},\ \cdot\big)$,
(c) $\big(\text{regulární matice } \mathbb{R}^{2\times 2},\ \cdot\big)$,
(d) $(\mathbb{Z},\ +)$,
(e) $(\mathbb{Z},\ \cdot)$,
(f) $(\mathbb{Q},\ +)$,
(g) $(\mathbb{Q},\ \cdot)$,
(h) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ \cdot)$.

Úloha 1. Pokud existují, nalezněte inverzní matice k maticím

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Úloha 2. *Další grupy*
Rozhodněte (podobně jako v kvízu), zda jde o (abelovské) grupy:
(a) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ \circ)$, kde $a\circ b = |ab|$ pro všechna $a,b\in\mathbb{Q}$,
(b) $(\mathbb{Q},\ \circ)$, kde $a\circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a,b\in\mathbb{Q}$,
(c) $(\mathbb{Q},\ \circ)$, kde $a\circ b = a+b+3$ pro všechna $a,b\in\mathbb{Q}$,
(d) $(\mathcal{F},+)$, tj. množina reálných funkcí jedné proměnné se sčítáním funkcí,
(e) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,
(f) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Úloha 3. Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ tak, aby $(G,\circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem „0“. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Úloha 4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ z \in \mathbb{Z} \right\} \text{s maticovým součinem.}$$

Úloha 5. Dokažte, že pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

- pokud $A^2 = 0$, pak $I_n - A$ je regulární,
- pokud $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n - A$ je regulární a
- pokud $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n + A$ je regulární.

Úloha 6. Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A je regulární, platí $\left(ABA^{-1}\right)^k = AB^kA^{-1}$.

Úloha 7. Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Úloha 8. Mějme permutaci $(1, 3, 4)\,(2, 5)\,(6, 11, 10, 9, 8, 7)$ zadanou seznamem cyklů.
Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.
Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?