Cvičení 5

Kvíz: Zakroužkujte všechna správná tvrzení.

(a) V tělesech jsou neutrální prvky 0 a 1 vždy jednoznačné a $0 \neq 1$.
(b) V každém tělese T platí „$0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in T$“.
(c) Z_{10} je těleso.
(d) Z_{17} je těleso.

Úloha 1. Spočítejte

(a) 6^{-1} v $\mathbb{Z}_7$,
(b) $5/2$ v $\mathbb{Z}_7$,
(c) $4/3$ v $\mathbb{Z}_{13}$,
(d) $14/6$ v $\mathbb{Z}_{23}$.

Úloha 2. Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost (počet řešení).

Úloha 3. Spočítejte

- 20^{3332} v tělese Z_{31},
- $5^{5^{350}}$ v Z_{13}.

Úloha 4. V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Úloha 5. Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární (čtvercové) matice stejných rozměrů.

$$\left(I - B^T A^{-1}\right) A + \left(A^T B\right)^T A^{-1}$$

Úloha 6. (z minule) Dokažte, že pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- pokud $A^2 = 0$, pak $I_n - A$ je regulární,
- pokud $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n - A$ je regulární a
- pokud $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n + A$ je regulární.

Úloha 7. (z minule) Mějme permutaci $(1,3,4)\,(2,5)\,(6,11,10,9,8,7)$ zadanou seznamem cyklů.

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

*** Úloha 8. (náročnější)** Loydova patnáctka je hlavolam sestávající z krabičky, do které se akorát vejdou čtvercové „kameny“ v mřížce 4×4. Kamenů je tam patnáct očíslovaných od 1 do 15, takže jedno pole mřížky je prázdné, což umožňuje posouvání kamenů. Například na příkladu níže se dá čtrnáctka posunout doprava, čímž se mezera vytvoří pod jedenáctkou, nebo se dá dvanáctka posunout dolů, čímž bude mezera vpravo od jedenáctky.

Hráč dostane nějakou startovní mřížku a snaží se posouváním kamenů seřadit kameny od 1 do 15 (první tři řádky našeho příkladu jsou seřazené).

Rozhodněte, zda jde hlavolam vyřešit z této startovní pozice:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	