Cvičení 6

Kvíz: Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$, (b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$, (c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$.

Vektorové prostory

Úloha 1. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor

(a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s násobením $\alpha \odot v = -\alpha \cdot v$ (a standardním sčítáním vektorů),

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s násobením $\alpha \odot v = |\alpha| \cdot v$,

(c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U a V jsou vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$ a sčítání a násobení je definováno po složkách (takže prvek $U \times V$ je dvojice $(u, v), u \in U, v \in V$ a např. $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$),

(d) množina všech zobrazení $f : M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je nějaká fixní množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ (jak tady funguje sčítání a násobení?).

Úloha 2. Najděte netriviální (alespoň 2 prvky) podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání (po složkách), ale ne na násobky (složky vynásobené reálným číslem),

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Úloha 3. Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ \ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ \ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s - t, 2t)^T;\ \ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Úloha 4. Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \ Ax = 0\}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Počítání v $\mathbb{Z}_p$

Úloha 5. Vyjádřete jako prvky daného tělese:

- $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ v $\mathbb{Z}_5$,
- $6 + 7,\ -7,\ 6 \cdot 7,\ 7^{-1}$ a $6/7$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Úloha 6. Řešte následující soustavu nejprve v $\mathbb{Z}_7$ a poté v $\mathbb{Z}_{13}$:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Lineární obal, lineární kombinace

Úloha 7. Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \Rightarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \Leftarrow \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(d) $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$.

Úloha 8. Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$ a $(3, 4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.