Cvičení 7

Kvíz: Kolik řešení v $\mathbb{Z}_3$ má následující soustava rovnic?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Úloha 1. Najděte vektor $x \in \mathbb{R}^n$, pro který platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

Úloha 2. Doplňte chybějící řády matic namísto otazníků tak, aby následující výraz dával smysl (pokud je více možností, vytvořte novou proměnnou):

$$E(AB + C) + D = F$$

- $A \in \mathbb{R}^{? \times k}$
- $B \in \mathbb{R}^{? \times ?}$
- $C \in \mathbb{R}^{? \times \ell}$
- $D \in \mathbb{R}^{n \times ?}$
- $E \in \mathbb{R}^{? \times m}$
- $F \in \mathbb{R}^{? \times ?}$

Úloha 3. Najděte všechny matice $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ takové, že:
(a) $A^2 = 0$,
(b) $A^2 = I_2$.

Úloha 4. Nalezněte střed a poloměr kružnice procházející body

$$(-1, 1), (-7, -1), (-3, 7).$$

Úloha 5. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A najděte symetrickou matici B takovou, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$. Komutuje součin dvou symetrických matic?
(matice A je symetrická když $A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j$)

Permutace

Úloha 6. Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Úloha 7. Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí nanejvíš $n-1$ transpozic.
Obecněji, uvažme $p \in S_n$ s k cykly. Pomocí kolika transpozic se dá složit? Najděte všechny možnosti (počtu transpozic v rozkladu p).

Úloha 8. Určete znaménko permutace zadané tabulkou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektorové prostory

Úloha 9. Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,

(b) posloupnosti s konečně mnoha nulami,

(c) monotónní posloupnosti (takové, které jsou neklesající nebo nerostoucí),

(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i \ \forall i$, x_1 a x_2 mohou být libovolné).

Úloha 10 (z minule). Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \Rightarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \Leftarrow \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$.

(Značení $A \Subset B$ říká „A je vektorový podprostor prostoru B.“)