Cvičení 8

Kvíz: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
(a) Je-li X nezávislá, je i Y nezávislá.
(b) Je-li X závislá, je i Y závislá.
(c) Je-li Y nezávislá, je i X nezávislá.
(d) Je-li Y závislá, je i X závislá.

Úloha 1. Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

- $\{u,\ v,\ 0\}$
- $\{u,\ u+v,\ u+w\}$
- $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$

Úloha 2. Zjistěte, zda jsou vektory v $\mathbb{R}^3$ lineárně závislé, či nezávislé.

- $(2,3,-5)^T,\ (1,-1,1)^T,\ (3,2,-2)^T$
- $(2,0,3)^T,\ (1,-1,1)^T,\ (0,2,1)^T$

Úloha 3. Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$, resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Úloha 4. Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1,a,1)^T$, $(1,1,1)^T$, $(2,2,a)^T$ lineárně nezávislé?

Úloha 5. Rozhodněte, zda jsou vektory z prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$ nad $\mathbb{R}$ lineárně nezávislé:

(a) $2x-1, x-1, 3x$,

(b) $x^2+2x+3, x+1, x-1$,

(c) $\sin x, \cos x$.

Úloha 6. Rozhodněte, zda je posloupnost vektorů $M = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ báze vektorového prostoru $\mathbb{Q}^3$ nad $\mathbb{Q}$.

Úloha 7. Rozhodněte, zda existuje množina vektorů se složkami z $\{0, 1, 2\}$ takových, že

- jsou lineárně závislé v $\mathbb{Q}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
- jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{Q}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,
- jsou lineárně nezávislé v $\mathbb{Q}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,
- jsou lineárně závislé v $\mathbb{Q}^n$, ale nezávislé v $\mathbb{Z}_3^n$.

* **Úloha 8.** Dokažte, že sloupce $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $A^T A$ je regulární.

Definice vektorového prostoru:
Vektorový prostor $(V, \oplus, \odot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je množina V spolu s binární operací $\oplus$ na V a binární operací $\odot : T \times V \to V$ „skalárního násobku“, tž.

1. $(V, \oplus)$ je abelovská grupa,
2. $\forall v \in V : 1 \odot v = v$,
3. $\forall \alpha, \beta \in T,\ \forall v \in V : (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$,
4. $\forall \alpha, \beta \in T,\ \forall v \in V : (\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$,
5. $\forall \alpha \in T,\ \forall u, v \in V : \alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$.