Cvičení 9

Kvíz: Pokud má matice $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ v odstupňovaném tvaru tři pivoty, jaká je dimenze jejího jádra?

Úloha 1. Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,
(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(d) $\mathcal{P}^2$,
(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,
(f) prostor symetrických matic $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Úloha 2. Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T,(4,1,3)^T\}$.
Pokud ano, určete souřadnice vzhledem k této bázi.

Úloha 3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Úloha 4. Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Úloha 5. Rozhodněte nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, zda pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{smallmatrix}\right)$ platí

- $(1,2)^T \in \operatorname{Ker}(A)$,
- $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Úloha 6. Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\quad v_2 = (2,2,3,3)^T,\quad v_3 = (1,-1,2,1)^T,\quad v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Úloha 7. Nad $\mathbb{R}$ nalezněte dimenze prostorů $\operatorname{Ker}(A)$, $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A^T)$, $\mathcal{S}(A^T)$, $\mathcal{R}(A^T)$, pro matice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Úloha 8. Rozhodněte, zda následující zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x, y) = (x, y + 3)$,

(b) $f(x, y) = (x + 2y, y)$,

(c) $f(x, y) = (0, 0)$,

(d) $f(x, y) = (x^2, y)$.

Úloha 9. Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,

(b) $f(A) = I_n$,

(c) $f(A) = A^2$,

(d) $f(A) = a_{11}$,

(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$ (tj. převedení na redukovaný odstupňovaný tvar).

*** Úloha 10.** ***(z minule)*** Dokažte, že sloupce $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $A^T A$ je regulární.