

Cvičení 10

Kvíz: Co je výsledkem násobku ${}_C[f]_B \cdot {}_B[f^{-1}]_D$?

(tj. $[f]_{B,C} \cdot [f^{-1}]_{D,B}$, při použití značení z přednášky)

Úloha 1. Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$f(x, y) = (x + y, x - y)^T$$

vypočítejte jeho matici vůči kanonické bázi.

Úloha 2. Najděte obraz vektoru $v = (-1, 1, 2)^T$ při lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovaném

$$f(1, 0, 0) = (1, 1)^T, \quad f(0, 1, 0) = (-1, 2)^T, \quad f(0, 0, 1) = (0, 0)^T$$

Úloha 3. Uvažme následující dvě báze prostoru $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = \{(0, 1, 2)^T, (1, 2, 2)^T, (-1, -1, 1)^T\},$$

$$B_2 = \{(0, 1, 1)^T, (0, 2, 1)^T, (1, 0, 1)^T\}$$

Zadané s udává souřadnice vektoru $x \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k B_1 . Nalezněte jeho souřadnice vzhledem k B_2 .

(a) $s = (0, 0, 1)^T$,

(c) $s = (4, 2, 9)^T$,

(b) $s = (1, 0, 1)^T$,

(d) $s = (1, 4, 2)^T$.

Úloha 4. Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi.

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

(b) Projekce na osu x .

(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček následované projekcí na osu x .

(d) Projekce na osu x následované otočením o 90° proti směru hodinových ručiček.

Jak obecně vypadá matice otočení o úhel α ?

Úloha 5. Vzpomeňme na vektorový prostor $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi

$$x \oplus y = xy$$

$$\alpha \odot x = x^\alpha.$$

Rozhodněte, zda je logaritmus (funkce $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) z tohoto prostoru do $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{R}$) lineární zobrazení (a jak by mohla vypadat matice takového zobrazení?).

Úloha 6. Uvažme lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$ zadané

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \{1, 1+x, x^2\}$. Najděte ${}_{B'}[f]_{B'}$, je-li $B' = \{1, x, 1+x^2\}$.

Úloha 7. Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ dané maticí

$$F = {}_{kan}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(0, 1, 3)^T, (1, 2, 0)^T, (0, 3, 1)^T\}.$$

Rozhodněte:

- Je zobrazení „na“?
- Je zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí vektor $(1, 1, 1)^T$ (zapsaný v kanonické bázi, tj. přímo tento vektor)?
- Nalezněte vektor (vůči kanonické bázi), který se zobrazí na $(2, 1, 2)^T$
- Nalezněte matici zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím.