

Cvičení 11

Kvíz: Jak vypadá matice přechodu od báze b_1, b_2, b_3 k bázi b_2, b_1, b_3 ?

Úloha 1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (2, 0, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T\}.$$

- Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.
- Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1 .
- Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B_1 .
- Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1 .

Úloha 2. (z minule) Uvažme lineární zobrazení $f : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^2$ zadané

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \{1, 1 + x, x^2\}$. Najděte ${}_{B'}[f]_{B'}$, je-li $B' = \{1, x, 1 + x^2\}$.

Úloha 3. (z minule) Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ dané maticí

$$F = {}_{kan}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(0, 1, 3)^T, (1, 2, 0)^T, (0, 3, 1)^T\}.$$

Rozhodněte:

- Je zobrazení „na“?
- Je zobrazení prosté?
- Kam se zobrazí vektor $(1, 1, 1)^T$ (zapsaný v kanonické bázi, tj. přímo tento vektor)?
- Nalezněte vektor (vůči kanonické bázi), který se zobrazí na $(2, 1, 2)^T$
- Nalezněte matici zobrazení f vzhledem ke kanonickým bázím.

Úloha 4. (z minule) Vzpomeňme na vektorový prostor $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi

$$x \oplus y = xy$$

$$\alpha \odot x = x^\alpha.$$

Rozhodněte, zda je logaritmus (funkce $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$) z tohoto prostoru do $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{R}$) lineární zobrazení (a jak by mohla vypadat matice takového zobrazení?).

Úloha 5. Mějme lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ zadané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\text{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Úloha 6. Nalezněte jádro a obraz lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definovaného předpisem $A \mapsto A + A^T$.

Úloha 7. Uvažme dvě lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete ${}_{kan}[g \circ f]_{kan}$.

Úloha 8. Co je obrazem prostoru $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení maticí $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ od báze $\{\cos x - \sin x, \sin x\}$ k bázi $\{\cos x + \sin x, \cos x\}$?

Úloha 9. Buď $f : U \rightarrow V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U; f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U .